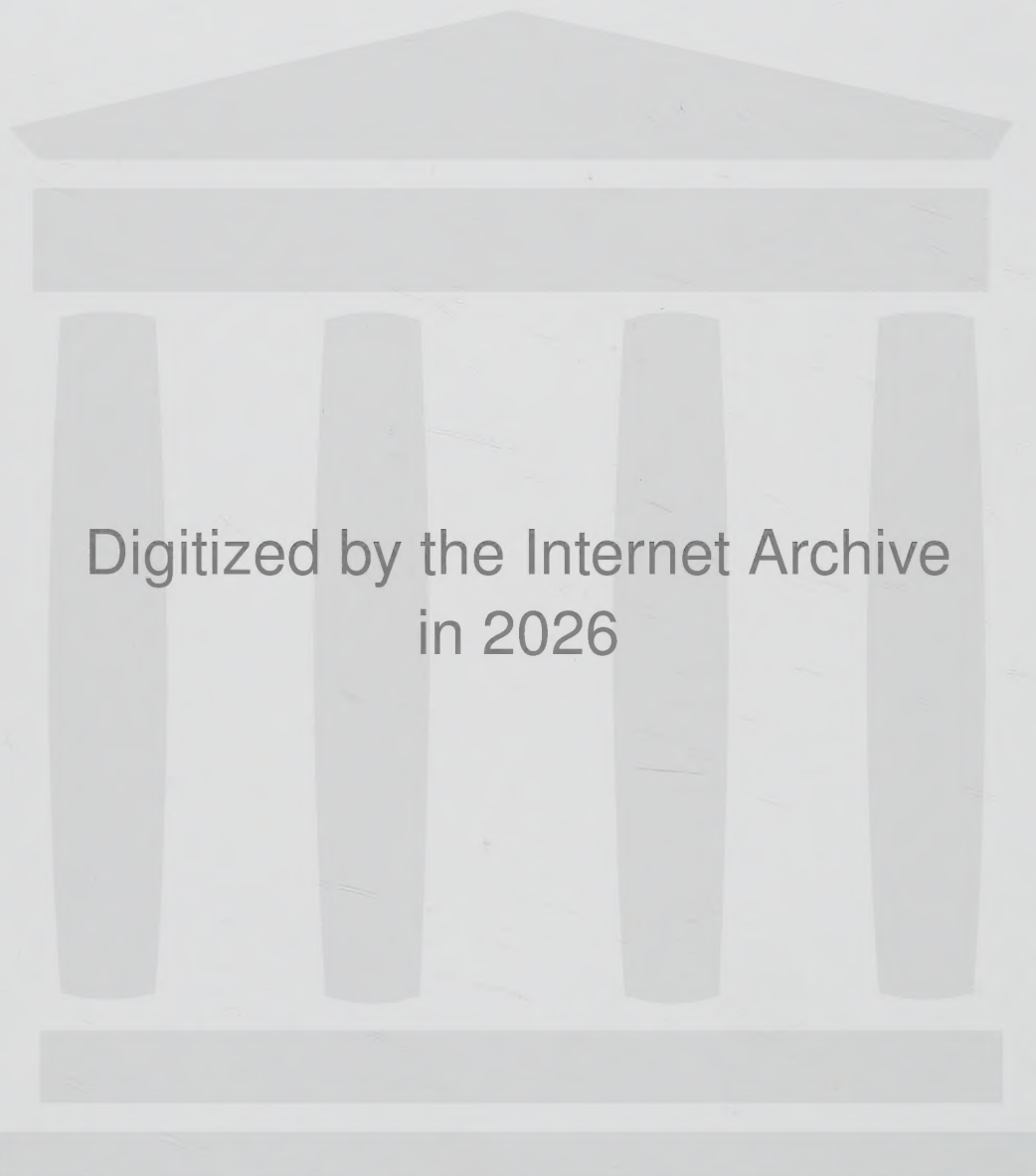


Frankfurt ^{am}
1968

H Engler



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545303_0033

Der Einfluss des Pauli-Paramagnetismus
auf die Eigenschaften von Supraleitern
mit hohen kritischen Feldern

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

vorgelegt von

Hans Engler
aus Koblenz

Frankfurt am Main
Mai 1968

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaft-
lichen Fakultät der Universität Frankfurt/Main

Dekan: Professor Dr. W. Martienssen
Erster Berichterstatter: Professor Dr. P. Fulde
Zweiter Berichterstatter: Professor Dr. H. Bilz

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Juni 1968

Verhandlungen der Gesellschaft der Naturwissenschaftler
in der Stadt Leiden

Verhandlungen der Gesellschaft der Naturwissenschaftler
in der Stadt Leiden
Verhandlungen der Gesellschaft der Naturwissenschaftler
in der Stadt Leiden



Tag der öffentlichen Prüfung: 14. Juni 1903

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

	Seite:
I. Einführung	2
II. Hochfeldsupraleiter	5
III. Korrelationsfunktionen	15
IV. Transporteigenschaften von Hochfeldsupraleitern	
a) Tunnelleitfähigkeit	30
b) Knight-Shift	34
c) Wärmeleitfähigkeit	37
d) Kernspinrelaxationszeit	45
e) Ultraschallabsorption	53

- - -

I. E I N F Ü H R U N G

Der Einfluss des Pauli-Paramagnetismus auf die Eigenschaften von Supraleitern mit hohen kritischen Feldern ist in den letzten Jahren von zahlreichen Autoren untersucht worden (1-14). In Supraleitern, deren kritische Felder von der Ordnung $20 T_c$ kOe sind, wobei T_c die supraleitende Übergangstemperatur gemessen in Grad ist, wird die Wechselwirkungsenergie der Spins der Leitungselektronen mit dem Magnetfeld vergleichbar mit dem Ordnungsparameter. Dieser Effekt liegt vor, zum einen bei der dünnen Schicht, deren Dicke viel kleiner als die Eindringtiefe ist, zum anderen bei dem Supraleiter zweiter Art mit hohem κ -Parameter, der das Verhältnis von Eindringtiefe zu Kohärenzlänge angibt. Im Idealfall der unendlich dünnen Schicht führt der Pauli-Paramagnetismus bei der Temperatur $T=0$ zu einem maximalen kritischen Feld der Größe $H = \Delta_0 / \mu \sqrt{2}$, wobei Δ_0 die BCS-Energielücke und μ das Bohrsche Magneton des Elektrons bedeutet ^{1,2}. Bei tiefen Temperaturen liegt ein Phasenübergang erster Ordnung vor, während bei hohen Temperaturen die Schicht in einem Phasenübergang zweiter Ordnung normalleitend wird ^{3,4}. Das Zusammenspiel zwischen dem Pauli-Paramagnetismus und der paarbrechenden Wirkung des Magnetfeldes diskutiert Maki im schmutzigen Grenzfall für die dünne Schicht ⁵ und im Fall des Supraleiters zweiter Art ^{6,7}.

Dem Pauli-Paramagnetismus wirkt die Spinbahnwechselwirkung ^{8,9}, die zu einer endlichen mittleren

freien Zeit für Spinflipstreuung führt, entgegen, indem sie versucht den Elektronenüberschuss einer Spin-sorten abzubauen. Bei hinreichend kurzer Spinflipzeit verschwinden die mit dem Pauli-Paramagnetismus verbundenen Phänomene.

Der Pauli-Term führt zu einer Verschiebung der BCS-Energielücke in der Zustandsdichte um $\pm \mu_H$ von der Fermikante für Elektronen parallel bez. antiparallel zur Feldrichtung. Da mit steigender Temperatur der Ordnungsparameter kleiner wird, tritt der Fall ein, dass die Zustandsdichte an der Fermikante größer wird als im normalleitenden Zustand. Bei hinreichend großer Paarbrechungswirkung des Feldes kann dieser Fall auch bei tiefen Temperaturen auftreten und führt bei vielen Effekten zu Anomalien, da in diesem Temperaturbereich nur die Elektronen nahe der Fermikante eine Rolle spielen. So wird z.B. die Tunnelleitfähigkeit bei verschwindender Spannung eines Supraleiter-Normalleiterkontaktes im supraleitenden größer als im normalleitenden Zustand, wenn der Supraleiter eine dünne Schicht mit zur Oberfläche parallelem Magnetfeld ist ^{10,11}.

Strongin und Kammerer ¹² haben kritische Felder dünner Schichten gemessen, die mit den bestehenden Theorien gute Übereinstimmung zeigen ¹³. Der Temperaturbereich, in dem nach Maki ⁸ und Werthamer et al. ⁹ Phasenübergänge erster Ordnung zu erwarten sind, wurde nicht erreicht. Das gleiche gilt auch für die Experimente mit Supraleitern zweiter Art ¹¹. In dieser Arbeit untersuchen wir den Einfluss des Pauli-Paramagnetismus und einer endlichen

Spinflipzeit auf Transportkoeffizienten. Wir interessieren uns für den Temperaturbereich, in dem Phasenübergänge zweiter Ordnung vorliegen und eine Entwicklung nach Potenzen des Ordnungsparameters möglich ist. Als besonders günstig erweist sich, dass wir mit dem gleichen Formalismus die dünne Schicht mit zur Oberfläche parallelem Magnetfeld und den Supraleiter zweiter Art behandeln können.

Im Kapitel II diskutieren wir, wie die Art des Phasenübergangs von der Temperatur, der freien Flugzeit τ und der Spinflipzeit τ_{so} der Elektronen abhängt. Wir finden, dass die Anomalie in der Zustandsdichte mit kleiner werdender Spinflipzeit verschwindet und bei noch kürzeren Spinflipzeiten nur noch Phasenübergänge zweiter Ordnung möglich sind.

Ferner diskutieren wir quantitativ die Möglichkeit, dass eine dünne Schicht in einem Temperaturintervall $0 < T_c < T < T_{ca}$ supraleitend ist. Im dritten Kapitel wird eine Übersicht gegeben, über die Methoden zur Berechnung von Transportkoeffizienten. Daran schließt sich eine Diskussion der Tunnelleitfähigkeit bei verschwindender Spannung und des Knight-Shifts an. Wir berechnen die Änderungen dieser Größen im supraleitenden gegenüber dem normalleitenden Zustand und finden, dass diese Änderungen mit kleiner werdender Temperatur unendlich werden, wenn wir uns dem Temperaturbereich der Phasenübergänge erster Ordnung nähern.

Die Wärmeleitfähigkeit zeigt auch das oben erwähnte

anomale Verhalten bei tiefen Temperaturen und wird in Kapitel VI diskutiert.

Die Formeln für die Untraschallabsorption und die Kernspinrelaxationszeit unterscheiden sich nach der BCS-Theorie nur durch die verschiedenen Kohärenzfaktoren, die zu einem rapiden Abfall beider Größen unterhalb der kritischen Temperatur führen.

Wir finden in Kapitel VII und VIII, dass beide Fälle ein von der BCS-Theorie abweichendes Verhalten zeigen wieder aufgrund der größeren Zustandsdichte an der Fermikante im supraleitenden Zustand. In beiden Fällen erstreckt sich diese Anomalie über einen größeren Temperaturbereich als bei den oben erwähnten Effekten und müsste sowohl bei den von Strongin und Kammerer¹² als auch bei den von Hake¹⁴ verwendeten Proben festgestellt werden.

II. HOCHFELDSUPRALEITER

In Supraleitern mit hohen kritischen Feldern kann der Pauli-Paramagnetismus zu Phasenübergängen erster Ordnung führen. Betrachten wir dazu den Extremfall eines Supraleiters ohne Meissnereffekt bei $T = 0$, in den ein Magnetfeld ungeschwächt eindringen kann.

Der Pauli-Paramagnetismus führt zu einem maximalen kritischen Feld oberhalb dessen Supraleitung nur metastabil existieren kann, wenn wir unendlich große Spinflipzeit der Elektronen

voraussetzen. Im normalleitenden Zustand besitzt das Metall eine magnetische Spinsuszeptibilität χ_p . Diese bewirkt in einem Magnetfeld der Stärke H eine Absenkung der freien Energie relativ zu dem supraleitenden Zustand, in dem keine Spinpolarisation vorliegt, um den Betrag $1/2 \chi_p H^2$

$$F_n(H=0) - F_n(H) = \frac{1}{2} \chi_p H^2 \quad (1)$$

Die paramagnetische Suszeptibilität läßt sich bei $T = 0$ durch die Zustandsdichte an der Fermigrenze $N(0)$ und das Bohr'sche Magneton ausdrücken.

$$\chi_p = N(0) \mu^2 \quad (2)$$

Andererseits ist nach BCS-Theorie die Differenz der freien Energien in den beiden Zuständen

$$F_n(H=0) - F_s(H) = \frac{1}{2} N(0) \Delta_0^2 \quad (3)$$

Δ_0 ist die Energielücke für $T = 0$. Der Vergleich beider Ausdrücke führt zu dem maximalen kritischen Feld

$$H_p = \Delta_0 / \mu \sqrt{2} \quad (4)$$

für das auch die Bezeichnung Clogston-Feld üblich ist. Abbildung 1 zeigt qualitativ den Verlauf der freien Energie als Funktion des Magnetfeldes im normal- und supraleitenden

Zustand. Die Gerade AC stellt das Niveau des normalleitenden Metalls dar und DJ gibt die Absenkung der freien Energie des Supraleiters ohne Meissnereffekt an. Der Pauli-Term bewirkt eine Verminderung der freien Energie des normalen Metalls und das neue Niveau wird von der Parabel AJ gebildet. Der Schnittpunkt C bestimmt das Clogston-Feld.

Die Differenz der freien Energien eines Supraleiters erster Art hängt quadratisch vom Feld ab und verläuft wie in DFB eingezeichnet. Das kritische Feld mit Berücksichtigung des Pauli-Term erhalten wir aus dem Schnittpunkt F.

Die Kurve DLC zeigt die Abhängigkeit der freien Energie eines Supraleiters zweiter Art ohne Berücksichtigung des Pauli-Paramagnetismus bezogen auf den Normalzustand, die im Punkt L, der dem unteren kritischen Feld H_{c1} entspricht, von der Kurve des Supraleiters erster Art abzweigt. Bei H_{c1} geht die Kurve berührend in die des normalleitenden Zustandes über, entsprechend einem Phasenübergang zweiter Ordnung. Mit Pauli-Term ergeben sich nun zwei Möglichkeiten. Im ersten Fall DLIG liegt ein Phasenübergang erster Ordnung vor bei I, da dort die freien Energien im normal- und supraleitenden Zustand gleich sind. Metastabil kann noch Supraleitung existieren bis zum Punkt K, der dem Überhitzungsfeld H_{sh} entspricht. Ähnliches gilt für das Unterkühlungsfeld H_{sc} in I. Im zweiten Fall LH liegt ein Phasenübergang zweiter Ordnung vor und der metastabile

Zustand ist verschwunden. Eine Entwicklung nach Potenzen des Ordnungsparameters ist nur möglich im zweiten Fall. Im folgenden beschränken wir die Diskussion auf Eigenschaften von Hochfeldsupraleitern in der Nähe des Phasenübergangs. Auf alle Werte des Ordnungsparameters kann die Theorie nur für die dünne Schicht erweitert werden, nicht jedoch für den Supraleiter zweiter Art, der im Rahmen der Gorkov-Gleichungen nur für kleine Δ untersucht werden kann. Gorkov und Abrikosov¹⁸ haben Verfahren entwickelt, Supraleiter mit statistisch verteilten Verunreinigungen für kleine Werte des Ordnungsparameters zu berechnen. Dazu geht man aus von den Ginzburg-Landau-Gleichungen im reinen Fall, die im Grenzfall kleiner Δ gelten und aus den Gorkov-Gleichungen ableitbar sind. Phasenübergänge zweiter Ordnung werden hierbei vorausgesetzt. Beim Übergang zum verunreinigten Metall sind nun Renormierungstechniken anzuwenden, wie sie aus der Theorie der normalen Metalle geläufig sind. Wir benötigen bei der Diskussion von Transportphänomenen und anderer Eigenschaften das räumliche Mittel $\langle |\Delta(r)|^2 \rangle$. Wir erhalten diese Größe aus den Ginzburg-Landau-Gleichungen, die Maki⁸ für einen Supraleiter zweiter Art mit nichtmagnetischen Verunreinigungen im schmutzigen Grenzfall verallgemeinert hat, wobei er eine endliche Spinflipzeit τ_{so} und den Pauli-Term berücksichtigte. Entwickeln wir in den Ginzburg-Landau-Gleichungen alle von der Temperatur abhängigen Größen

bei festgehaltenem Magnetfeld nach Potenzen von $(1 - T/T_c)$, dann erhalten wir für den Mittelwert $\langle |\Delta(r)|^2 \rangle$ in erster Ordnung

$$\langle |\Delta(r)|^2 \rangle = \Delta_0^2 \cdot 2 \cdot (2\gamma t_c)^2 |1 - T/T_c| \frac{|k(t_c)|}{\beta f_{\perp}(t_c)}$$

$$k(t_c) = 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - I^2}}\right) p_- \Psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \beta\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - I^2}}\right) p_+ \Psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \beta\right)$$

$$f_{\perp}(t_c) = (2\gamma t_c)^3 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega_n - iI + a + b}{(\omega_n + a)^2 - b^2 + I^2} \right)^3 - 2I^2 b \frac{(\omega_n + a + b)^2 + I^2}{(\omega_n + a)^2 - b^2 + I^2} \right\}$$

$$p_{\pm} = \frac{1}{2\gamma t_c} (a \pm \sqrt{b^2 - I^2})$$

$$a = \frac{1}{3\tau_{s0} d_0} + \frac{\tau_{tr} V_F^2 c H_{c2}}{3\Delta_0}; \quad b = \frac{1}{3\tau_{s0} d_0}; \quad I = \frac{\mu H}{\Delta_0}; \quad \omega_n = 2\gamma t_c \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$t_c = T_c/T_{c0} \quad \beta = 1.18$$

$$\psi^{(n)}(x) = \frac{d^n \psi(x)}{dx^n} \quad \psi(x) = \psi(1) - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

Hierbei sind die Temperaturen auf die BCS-Übergangstemperatur T_{c0} normiert, die linear mit der Energielücke Δ_0 zusammenhängt.

$$\Delta_0 = \pi T_{c0} / \gamma \quad \gamma = 1.78$$

Ferner bedeutet V_F die Fermigeschwindigkeit, τ_{tr}

die mittlere Transportzeit und τ_{50} die Spinflipzeit der Elektronen. Der obige Ausdruck ist abgeleitet worden im schmutzigen Grenzfall $\tau \Delta_0 \ll 1$ und für große Spinflipzeiten $\tau_{50} \gg \tau$. Wir eliminieren das kritische Magnetfeld H_{c2} mit Hilfe der linearisierten Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\ln t_c + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - I^2}}\right) \psi\left(\frac{1}{2} + \beta\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - I^2}}\right) \psi\left(\frac{1}{2} + \beta\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (7)$$

und betrachten das Mittel $\langle |\Delta(r)|^2 \rangle$ als Funktion der kritischen Temperatur T_c und der zwei materialabhängigen Parameter

$$c = \frac{\tau_H v_F^2 e}{3\mu} \quad b = \frac{1}{3\tau_{50} \Delta_0} \quad (8)$$

Nach Maki⁸ gibt der Parameter c das Verhältnis von Clogston-Feld zum kritischen Feld ohne Berücksichtigung des Pauli-Term an.

Wiederholen wir die Rechnungen von Maki für die supraleitende dünne Schicht mit den gleichen Wechselwirkungen wie oben, dann finden wir, dass erstens $f_{\perp}(t_c)$ zu ersetzen ist durch $f_{\parallel}(t_c)$ wobei

$$f_{\parallel}(t_c) = f_{\perp}(t_c) + (2f_{\perp}(t_c))^3 (b-a) \operatorname{Re} \left\{ \sum_n \left(\frac{a_n - (1+a+b)}{(a_n+a)^2 - b^2 - I^2} \right)^2 \right\} \quad (9)$$

und zweitens der Parameter c jetzt folgende Bedeutung hat:

$$c = \frac{\tau_H v_F^2 e^2 d^2 \Delta_0}{18\mu^2} \quad (10)$$

Bei der Ableitung ist von folgenden Annahmen Gebrauch gemacht worden.

- 1.) Der Ordnungsparameter kann als konstant angesehen werden. Dies trifft zu, wenn $d \ll (\ell \xi_0)^{1/2}$
- 2.) Das Magnetfeld dringt nahezu ungeschwächt ein. Dies erfordert $d \ll \delta_L$
- 3.) Die Elektrodynamik ist lokal. $d \gg \ell$
Schmutziger Grenzfall und $\tau \ll \tau_{J0}$ werden weiter vorausgesetzt.

Nach einer allgemeinen Theorie von Landau ¹⁵ liegt dann ein Phasenübergang zweiter Ordnung vor, wenn in der Entwicklung der freien Energie nach Potenzen des Ordnungsparameters Δ der Koeffizient vierten Grades positiv ist. In unserem Fall entspricht diesem Koeffizienten die Funktion $f_{\perp\parallel}(t_c)$

Abbildung 2 zeigt qualitativ den charakteristischen Verlauf der Phasengrenzkurven bei unendlich großer Spinflipzeit für mehrere Werte von c im Fall der dünnen Schicht, die die Lösungen der linearisierten Ginzburg-Landau-Gleichung (7) darstellen. Die Punkte dieser Kurven entsprechen nur dann Phasenübergängen von stabilen supraleitenden Zuständen in ebensolche normale und umgekehrt, wenn die Funktion $f_{\parallel}(t_c)$ dort positiv ist.

Gilt das negative Vorzeichen, so liegt hier der Unterkühlungsfall vor. Bilden wir mit Hilfe der linearisierten Ginzburg-Landau-Gleichung die erste Ableitung von $H_{c2}(t_c)$ nach t_c , so finden wir, dass diese proportional der Funktion $k(t_c)$ ist, und dass insbesondere die Nullstellen dieser Funktion die Temperaturen angeben, bei denen die kritischen Felder maximal werden. Bei verschwindender Spinbahnwechselwirkung haben wir in Abbildung 3 die Null-

stellen der Funktionen $f_{||}(t_c)$ und $k(t_c)$ in der t_c, c -Ebene aufgetragen für den Fall der dünnen Schicht. In dem Gebiet mit $f_{||}(t_c) < 0$ existieren nur Phasenübergänge erster Ordnung und unsere Entwicklung gilt hier nicht. Schichten mit Parameterwerten c derart, dass es ein t_c gibt mit $f_{||}(t_c) > 0$ und $k(t_c) < 0$, besitzen ein maximales kritisches Feld für $t_c > 0$. Die ist gleichbedeutend mit der Existenz von zwei Übergangstemperaturen T_{c1} und T_{c2} , wobei beiden Temperaturen Phasenübergänge zweiter Ordnung entsprechen und die Probe supraleitend ist für Temperaturen $T_{c1} < T < T_{c2}$.

Lösungen der Ginzberg-Landau-Gleichung, bei denen $f_{||,\perp}(t_c) < 0$ ist, geben die Unterkühlungsfelder an. Unterkühlungs- und Überhitzungsfelder sind in den Referaten ¹³ und ¹⁶ diskutiert. Die Spinbahnwechselwirkung, die eine endliche Spinflipzeit τ_{so} zur Folge hat, wird versuchen die Polarisierung der Spins der Leitungselektronen wieder rückgängig zu machen. Mit einer endlichen Spinflipzeit ist stets eine Unschärfe der Energie der Elektronen verbunden. Daher verschwinden die mit dem Pauli-Paramagnetismus verbundenen Phänomene, wenn

$$\mu H \ll 1/\tau_{so}$$

ist. In den Abbildungen 4 und 5 sind wieder für die dünne Schicht die Nullstellen der Funktionen $f_{||}(t_c)$ und

$k(t_c)$ in der t_c, c -Ebene aufgetragen für verschiedene Werte des Parameters b , der ein Maß für die Spinbahnwechselwirkung darstellt. Wir finden, dass für $b > 0.1$ die Punkte mit $k(t_c) < 0$ im Gebiet liegen, wo $f_0(t_c) < 0$ ist. Für $b > 0.1$ tritt der Fall des supraleitenden Zustands in einem Intervall $0 < T_{c1} < T < T_{c2}$ mit zwei Phasenübergängen zweiter Ordnung nicht mehr auf. Für $b > 0.456$ ist die Funktion $k(t_c)$ für alle Argumente positiv. Phasenübergänge erster Ordnung bei tiefen Temperaturen liegen vor, solange $b < 2.32$ ist.

Strongin und Kammerer haben kritische Felder von AB -Schichten der Dicke $100 \text{ \AA}$ gemessen. Avannhaus¹³ hat diese Messungen diskutiert und findet, dass für $\tau = 10^{-16} \text{ sec}$ und $\tau_{s0} = 10^{-12} \text{ sec}$ die Ergebnisse von Strongin und Kammerer¹² mit der linearisierten Ginzburg-Landau-Gleichung übereinstimmen. Die Parameter der Schichten lagen dabei in dem Bereich, in dem Phasenübergänge erster Ordnung auftreten können.

In der Abbildung 6 sind die Werte von c in Abhängigkeit von der Spinbahnwechselwirkung, bei denen für $T = 0$ die Funktion $f(t_c)$ verschwindet. Die Ordinaten stellen die maximalen Werte von c dar, bei denen noch Phasenübergänge erster Ordnung möglich sind, die maximalen Temperaturen, für die noch Phasenübergänge erster Ordnung möglich sind, werden bei verschwindender Schichtdicke angenommen ($c=0$) und sind in Abbildung 7 in Abhängigkeit

von b aufgetragen.

Für den Supraleiter zweiter Art liegt bei $T = 0$ und unendlich großer Spinflipzeit dann ein Phasenübergang erster Ordnung vor, wenn das kritische Feld ohne Berücksichtigung des Pauli-Terms größer als das Clogston-Feld ist. Die numerische Auswertung zeigt, dass der Bereich, in dem $k(t_c) < 0$ ist, vollständig in dem Gebiet der t_c, c -Ebene liegt, in dem auch $f_1(t_c) \leq 0$ ist für alle Werte von b (Abb. 8, 9).

Dies schliesst ein maximales kritisches Feld für $t_c > 0$ aus. Für $b > 2.32$ existieren für alle Temperaturen nur noch Phasenübergänge zweiter Ordnung. Für verschwindendes c sind die beiden Funktionen $f_1(t_c)$ und $f_{II}(t_c)$ gleich und Diagramm 7 gilt auch für den Supraleiter im gemischten Zustand. Die maximalen Werte von c für $T=0$, bei denen noch Phasenübergänge erster Ordnung möglich sind, finden wir im Diagramm 6 als Funktion von b .

Für Temperaturen $T \gg T_c - T$ lässt sich die linearisierte Ginzburg-Landau-Gleichung nach dem Magnetfeld auflösen. Wir erhalten in diesem Temperaturbereich für das kritische Feld einer dünnen Schicht aus der linearisierten Ginzburg-Landau-Gleichung (7):

$$H_{c2} = \frac{1}{\mu} \left[2\gamma t (1-t) \left(\left(c + \frac{1}{2b} \right) \psi''\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{t}{2b^2} \left(\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{b}{2\gamma t}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right) \right) \right]^{1/2} \quad (11)$$

Dies vereinfacht sich im Fall verschwindender Spinbahnwechsel-

wirkung $b = 0$ auf

$$H_{c2} = \frac{1}{\mu} \left[2\gamma t(1-t) \left(c \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2(2\gamma t)^2} \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) \right) \right]^{1/2} \quad (12)$$

und im Fall sehr kleiner Spinflipzeiten $b \rightarrow \infty$

$$H_{c2} = \frac{1}{\mu} \left[2\gamma t(1-t) / c \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) \right]^{1/2} \quad (13)$$

Die kritischen Felder einer dünnen Schicht und eines Supraleiters zweiter Art sind für verschwindendes c in beiden Fällen gleich.

Für $c \neq 0$ finden wir für das kritische Feld des Supraleiters im gemischten Zustand für Temperaturen $T \gg T_{co} - T$ folgenden Ausdruck

$$H_{c2} = \frac{1}{\mu} 2\gamma t(1-t) / c \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (14)$$

III. KORRELATIONSFUNKTIONEN

Bei der Berechnung von Transportkoeffizienten treten Korrelationsfunktionen auf, die von der Temperatur und der Zeit abhängen können.

$$F_{AB}(t, t') = \langle A(t) B(t') \rangle \quad (1)$$

Hierbei ist die Mittelung über die großkanonische Gesamtheit vorzunehmen; im Fall von verunreinigten Systemen ist weiterhin noch über die statistisch ver-

teilten Verunreinigungen zu mitteln. Im statistischen Gleichgewicht hängen die Korrelationsfunktionen nur von der Zeitdifferenz ab. Zwischen den Fouriertransformierten der Korrelationsfunktion und der kausalen Green-Funktion

$$G_{AB}(t, t') = \langle T \{ A(t) B(t') \} \rangle \quad (2)$$

besteht folgender Zusammenhang

$$F_{AB}(\omega) = (G_{AB}(\omega + id) - G_{AB}(\omega - id)) / (1 - e^{i\omega T}) \quad (3)$$

Die reelle Achse stellt für die kausale Green-Funktion in der komplexen ω -Ebene den Verzweigungsschnitt dar und die Differenz der Werte, die die Green-Funktion in der oberen und unteren Halbebene bei Annäherung an die reelle Achse annimmt, ist bis auf den Nenner in (3) gleich der Fouriertransformierten der Korrelationsfunktion (Zubareff ¹⁷). Die kausale Green-Funktion berechnen wir in den diskreten Punkten $\omega = i\omega_n = i\pi T(2n+1)$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ auf der imaginären Achse und setzen von diesen Punkten aus analytisch in die ω -Ebene fort. In diesen Punkten ist die Green-Funktion identisch mit der Matsubara-Green-Funktion $G_T(\omega_n)$. Für die Green-Funktion $G_T(\tau)$ existiert eine Entwicklung in eine Fourierreihe

$$G_T(\tau) = T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} G_T(\omega_n) \quad (4)$$

und umgekehrt gilt

$$G_T(\omega_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau e^{i\omega_n \tau} G_T(\tau) \quad (5)$$

Damit ist die Berechnung der Korrelationsfunktionen auf die von Green-Funktionen zurückgeführt. Benützen wir die Definition der Zweiteilchengreenfunktion:

$$G^{\text{II}}(r, r', \tau) = \langle T \{ n(r, \tau) n(r', 0) \} \rangle \quad (6)$$

$$n(r, \tau) = \psi(r, \tau) \psi^\dagger(r, \tau)$$

und führen Vertexfunktionen $V_A(r)$ und $V_B(r)$ ein, die den Operatoren A und B entsprechen, dann können wir für die Fouriertransformierte von $G_T(r, r', \tau)$ auch schreiben:

$$G_T(q, \omega_n) = \int d^3r' d\tau e^{-iq(r-r') + i\omega_n \tau} V_A(r) V_B(r') G^{\text{II}}(r, r', \tau) \quad (7)$$

Die Zweiteilchengreenfunktion stellen wir in Näherung durch eine Entwicklung nach Einteilchengreenfunktionen dar, in der wir Streuprozesse vernachlässigen.

$$G^{\text{II}}(r, r', \tau) = - G(r, r', \tau) G(r', r, -\tau) - F(r, r', \tau) F^\dagger(r, r', \tau) \quad (8)$$

Hierbei haben wir einen konstanten Term weggelassen, der bei der Bildung der Differenz in (3) keinen Beitrag liefert. Die auf der rechten Seite stehenden Funktionen sind die Green-Funktionen der Elektronen im Supraleiter.

$$G(r, r', \tau) = - \langle T \{ \psi(r, \tau) \psi^\dagger(r', \tau) \} \rangle \quad (9)$$

$$F(r, r', \tau) = \langle T \{ \psi(r, \tau) \psi(r', \tau) \} \rangle$$

Den Ordnungsparameter Δ erhalten wir aus der F-Funktion.

$$\Delta(r) = \lambda F(r, r, \tau)$$

Die auftretenden Greensfunktionen sind 2 x 2 Matrizen, wobei die G-Funktion Diagonalgestalt hat, während F nur auf der Nebendiagonalen nichtverschwindende Elemente besitzt.

Entwickeln wir (8) in eine Fourierreihe gemäss (5),
so ergibt sich

$$G^{\text{II}}(r, r', \omega_n) = -T \sum_{\omega_1, \omega_2} \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_n) [G(r, r', \omega_1) G(r', r, \omega_2) + F(r, r', \omega_1) F^+(r', r, -\omega_2)] \quad (11)$$

Die Green-Funktionen der Elektronen in einem Supraleiter genügen den Gorkov-Gleichungen, die in der integralen Form lauten ¹⁸

$$G(r, r', \omega) = \tilde{G}^{(0)}(r, r', \omega) - \int d^3\ell \tilde{G}^{(0)}(r, \ell, \omega) \Delta(\ell) F^+(\ell, r', \omega) \quad (12)$$

$$F^+(r, r', \omega) = \int d^3\ell \tilde{G}^{(0)}(\ell, r', \omega) \Delta^*(\ell) G(\ell, r, \omega)$$

Hierbei bedeutet $\tilde{G}^{(0)}$ die Green-Funktion der Elektronen im normalen Metall und ist in unserem Fall mit Berücksichtigung des Pauli-Terms und des Magnetfeldes Lösung der Differentialgleichung:

$$\left\{ i\omega + \frac{1}{2m} (\nabla - ieA(r))^2 + \mu_0 + \mu(\vec{\sigma} \cdot \vec{H}) \right\} \tilde{G}^{(0)}(r, r', \omega) = \delta(r - r') \quad (13)$$

Hierbei sind $A(r)$ das Vektorpotential, μ_0 das chemische Potential, μ das Bohr'sche Magneton und σ_i die Pauli-Matrizen. Quadratische Glieder des Vektorpotentials in (13) können vernachlässigt werden, da die Eindringtiefe des Magnetfeldes klein gegenüber dem Radius der Elektronenbahnen im Magnetfeld ist. Wir finden in dieser Näherung, dass das Magnetfeld eine Änderung der Phase der Green-Funktion bewirkt

$$\tilde{G}^{(0)}(r, r', \omega) = e^{iA(r)(r-r')} G^{(0)}(r-r', \omega) \quad (14)$$

Die Green-Funktion ist Lösung der Differentialgleichung (13) mit $A = 0$ und die dazugehörige Fouriertransformierte lautet:

$$G^{(0)}(p, \omega) = (i\omega + \mu(\sigma H) - \xi)^{-1} \quad (15)$$

Liegt ein Phasenübergang zweiter Ordnung vor, so ist eine Entwicklung der Gorkov-Gleichungen nach Potenzen des

Ordnungsparameters Δ möglich und wir finden in quadratischer Näherung:

$$G(r, r', \omega_K) = \tilde{G}^{(0)}(r, r', \omega_K) - \int d^3r'' d^3r''' \tilde{G}^{(0)}(r, r'', \omega_K) \Delta(r'') \times \\ \times \tilde{G}^{(0)}(r'', r''', \omega_K) \Delta^+(r''') \tilde{G}^{(0)}(r''', r', \omega_K) \quad (16)$$

$$F^+(r, r', \omega_K) = \int d^3r'' \tilde{G}^{(0)}(r, r'', -\omega_K) \Delta^+(r'') \tilde{G}^{(0)}(r'', r', \omega_K)$$

Daraus erhalten wir mit Hilfe von (8) für die Fourierentwickelte der temperaturabhängigen Green-Funktion (7)

$$G_T(K, \omega) = -T \sum_i G(\omega, \omega_i, \omega) (T_0 + T_1 + T_2 + T_3)$$

$$T_0(K, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{V} \int d^3r \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} V_A(p, K) V_B(p, K) \tilde{G}^{(0)}(p, \omega_1) \tilde{G}^{(0)}(p+K, \omega_2)$$

$$T_1(K, \omega_1, \omega_2) = -\frac{1}{V} \int d^3r \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_A(p, K) V_B(p, K) \tilde{G}^{(0)}(p, \omega_1) \tilde{G}^{(0)}(p+K, \omega_2) \times \\ \times \Delta(q) \tilde{G}^{(0)}(p+q+K+2eA, \omega_1) \Delta^+(q) \tilde{G}^{(0)}(p+K, \omega_2)$$

$$T_2(K, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{V} \int d^3r \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_A(p, K) V_B(p, K) \tilde{G}^{(0)}(p, \omega_1) \Delta(q) \tilde{G}^{(0)}(p+q+2eA, \omega_1) \times \\ \times \Delta^+(q) \tilde{G}^{(0)}(p, \omega_2) \tilde{G}^{(0)}(p+K, \omega_2)$$

$$T_3(K, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{V} \int d^3r \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_A(p, K) V_B(p, K) \tilde{G}^{(0)}(p, \omega_1) \Delta(q) \tilde{G}^{(0)}(p+q+2eA, \omega_1) \times \\ \times \tilde{G}^{(0)}(p+q+K+2eA, \omega_1) \Delta^+(q) \tilde{G}^{(0)}(p+K, \omega_2)$$

Im folgenden bezeichnen wir die Einteilchen-Green-Funktionen $\tilde{G}^{(0)}(p, \omega)$ mit $G(p, \omega)$.

Bei der Ableitung der Formel wurde davon Gebrauch gemacht, dass die Green-Funktion $G(r-r')$ im Ortsraum exponentiell für $|r-r'| > \xi_0 = \tau/v_F$ verschwindet. Der größte Beitrag zu dem Integral in (7) kommt von den Punkten $|r-r'| < \xi_0$. Ferner wird vorausgesetzt, dass ξ_0 klein gegen die Eindringtiefe des Magnetfeldes ist und die Vertexfunktionen nur schwach veränderlich sind über Entfernungen der Größenordnung ξ_0 .

Das erste Integral in (17) steht für den normalleitenden Zustand und ist magnetfeldunabhängig. Dies resultiert daraus, dass wir die Krümmung der Elektronenbahnen im Magnetfeld vernachlässigt haben. Die Formel (17), die für den sauberen Supraleiter gilt, verallgemeinern wir für einen Supraleiter mit Verunreinigungen. Dazu führen wir für die Integrale folgende Diagramme ein:

$$\begin{aligned}
 I_0(K, \omega_1, \omega_2) &= \text{Diagram 1: A bubble diagram with two external wavy lines and two internal wavy lines.} \\
 I_1(K, \omega_1, \omega_2) &= \text{Diagram 2: A rectangular diagram with two vertical wavy lines and two horizontal wavy lines.} \\
 I_2(K, \omega_1, \omega_2) &= \text{Diagram 3: A rectangular diagram with two vertical wavy lines and two horizontal wavy lines, with a small circle on the right vertical line.} \\
 I_3(K, \omega_1, \omega_2) &= \text{Diagram 4: A rectangular diagram with two vertical wavy lines and two horizontal wavy lines, with a small circle on the right vertical line and a wavy line on the top horizontal line.}
 \end{aligned}$$

$\bigcirc \rightarrow \Delta(q)$
 $\sim \rightarrow V(k)$
 $\text{---} \rightarrow G(p, \omega)$

(18)

Die Wechselwirkung der Elektronen mit den Verunreinigungsatomen beschreiben wir durch die Streuamplitude¹⁹

$$u(p, p') = u_1(p-p') + i u_2(p-p') \frac{1}{p_F^2} [\vec{p} \times \vec{p}'] \vec{\sigma} \quad (19)$$

Der erste Term kommt von der Streuung an nichtmagnetischen Verunreinigungen her, der zweite berücksichtigt Spinflipprozesse. Den Streuamplituden entsprechen folgende Stoßzeiten:

$$\begin{aligned} 1/\tau_1 &= \frac{\pi m p_0}{(2\pi)^2} \int d\Omega |u_1(\Omega)|^2 \\ 1/\tau_{so} &= \frac{\pi m p_0}{(2\pi)^2} \int d\Omega |u_2(\Omega)|^2 \sin^2 \theta \\ 1/\tau &= 1/\tau_1 + 1/\tau_{so} \end{aligned} \quad (20)$$

Die Mittelung über die Verunreinigungen führen wir mit der von Gorkov und Abrikosov¹⁸ abgeleiteten Methode durch und übernehmen entsprechende Näherungen. Mit jedem Verunreinigungsvertex ist in den Gleichungen ein Faktor $u(q) e^{iqr}$ verbunden. Einen von Null verschiedenen Beitrag liefern aus Invarianzgründen nur Prozesse, bei denen zweimal am gleichen Atom gestreut wird. Wir deuten dies in dem Diagramm an, in dem wir zwei Verunreinigungsvertices durch eine gestrichelte Linie (Wechselwirkungsline) verbinden. Den Imaginärteil der Selbstenergie der Einteilchen-Green-Funktion erhalten wir aus dem Diagramm:

$$\text{---} \text{---} \text{---} = \frac{1}{2\tau} \text{sign}(\omega) \quad (21)$$

Die Greensfunktion im normalen Metall mit nichtmagnetischen Verunreinigungen und endlicher Spinflipzeit sowie mit Berücksichtigung des Pauli-Terms ist dann

$$G(p, \tilde{\omega}) = \begin{pmatrix} (i\tilde{\omega}_- - \xi)^{-1} & 0 \\ 0 & (i\tilde{\omega}_+ - \xi)^{-1} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\tilde{\omega}_{\pm} = \omega (1 + 1/2\tau|\omega|) \pm i\mu H$$

Die Renormierung der Diagramme in (18) erfolgt in drei Schritten

1. Renormierung der Green-Funktionen
2. Renormierung der Vertices
3. Berücksichtigung der Diagramme, in denen Wechselwirkungslinien zwei Vertices überspringen.

Im ersten Schritt ersetzen wir alle auftretenden Green-Funktionen des sauberen Supraleiters durch die in (22) angegebenen. Im zweiten Schritt berücksichtigen wir Diagramme, in denen Wechselwirkungslinien einen Vertex einschließen. Wir betrachten zuerst Vertices mit den spinunabhängigen Vertex-Funktionen $V(q)$.

Wir lassen bei der Renormierung alle Diagramme weg, in denen sich Wechselwirkungslinien überschneiden, d.h., die Summation erfolgt in der Leiternäherung. Dann erfüllt die so renormierte Vertexfunktion $\tilde{V}(q)$ die Dyson-Gleichung:

$$\text{Diagram with triangle and wavy line} = \text{Diagram with triangle} + \text{Diagram with triangle and wavy line} \quad (23)$$

$$\tilde{V}(q) = V(q) + n \cdot \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} U(p, p') G(p', \tilde{q}) \tilde{V}(p, q) G(p', q) U(p, p')$$

Da bei der Integration nur die unmittelbare Umgebung der Fermikante eingeht, ist allein die Winkelabhängigkeit der Vertexfunktion relevant. Der Winkelanteil der Vertexfunktionen, die im späteren auftreten, ist von der Form

$$V^l(p, q) \sim \cos^l \vartheta \quad \vartheta = \angle p, q \quad (24)$$

wobei wir als Richtung des Vektors q die z -Achse gewählt haben. Gehen wir von einem kugelsymmetrischen Verunreinigungspotential aus, dann erhalten wir winkelunabhängige Vertexkorrekturen A^e .

Im schmutzigen Grenzfall $\tau \Delta_c \ll 1$ ergibt sich für den Vertex mit $l = 0$ folgende Renormierungsvorschrift:

$$\tilde{V}^{\ell} = V^{\ell} + V^{\ell}(-\omega_1, \omega_2) \frac{1 - \gamma^{-1} \arctg \gamma}{1 - \gamma^{-1} \arctg \gamma} \quad (25)$$

$$\gamma = \frac{V_F q}{\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2} = V_F q \tau$$

Die Renormierung ist nur dann von null verschieden, wenn die Pole der Green-Funktionen (23) in zwei verschiedenen Halbebenen liegen. Die Korrekturen zu den Vertexfunktionen mit $l \neq 0$ ergeben sich aus der Rekursionsformel

$$A^{\ell} = -i\gamma^{-1} (A^{\ell-1} - \frac{1}{2\ell} \frac{1 - (-)^{\ell}}{\tau|\omega_1 - \omega_2| + (1 - \gamma^{-1} \arctg \gamma)}) V^{\ell}(-\omega_1, \omega_2) \quad (26)$$

Die Spezialfälle $\gamma=0$ und $\gamma \gg \tau\omega$ für $\ell=0, 1, 2$ sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

ℓ	$A^{\ell} \quad \gamma=0$	$A^{\ell} \quad \gamma \gg \tau\omega$
0	$\frac{1}{\tau \omega_1 - \omega_2 }$	$\frac{\gamma^{-1} \arctg \gamma}{1 - \gamma^{-1} \arctg \gamma}$
1	0	$\frac{i}{\gamma}$
2	$\frac{1}{3} \frac{1}{\tau \omega_1 - \omega_2 }$	$\frac{1}{\gamma^2}$

(27)

Die Dysongleichung für die Renormierung des Supraleitungsvertex $\Delta(q)$ lautet:

$$\tilde{\Delta}(q) = \Delta(q) + n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} u(p-p') G(p', \tilde{\omega}) \tilde{\Delta}(q) G(p'+q, -\tilde{\omega}) u^*(p-p') \quad (28)$$

Der nackte Vertex $\Delta(q)$ ist eine 2×2 Matrix

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Den renormierten Vertex setzen wir mit den entsprechenden Matrixelementen $\tilde{\Delta}_{\pm}$ an und erhalten unter der Annahme $\tau\omega_0 \gg \tau$ und $\tau\Delta_c \ll 1$ das Gleichungssystem:

$$\tilde{\Delta}_{\pm}(q) = \Delta(q) + \frac{1}{2\tau \tilde{\omega}_+} (1 - \frac{1}{2} \tau^2 \omega_+^2) + \frac{\tilde{\Delta}_{\pm}(q)}{3\tau\omega_0 \tilde{\omega}_+} (1 - \frac{1}{2} \tau^2 \omega_+^2)$$

Die Auflösung dieses Systems führt auf die Renormierungsvorschrift ⁸ :

$$\tilde{\Delta}_{\pm}(q) = \eta_{\pm}(q) \cdot \Lambda(q)$$

$$\eta_{\pm}(q) = \frac{\omega_{\pm}(\omega \mp iI + a + b)}{(\omega + a)^2 - b^2 + I^2} \quad (31)$$

$$I = \mu H / \Delta_0 \quad a = b + \frac{\tau v^2 q^2}{3} \quad b = 1/3 \tau_{s0} \Delta_0$$

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega}{\Delta_0} (1 + 1/2 \tau |w|) \pm iI$$

Für nicht kugelsymmetrisches Verunreinigungspotential ist nach Gorkov ²⁰ und Maki ⁷ die Lebensdauer τ , die in dem Ausdruck für den Operator a (Gl.31) auftritt, näherungsweise durch die Transportzeit τ_{tr} zu ersetzen.

$$\frac{1}{\tau_{tr}} = \frac{n m p_0}{(2\pi)^2} \int d\Omega \, |\mathbf{u}(\Omega)|^2 (1 - \cos \vartheta) \quad (32)$$

Im dritten Schritt betrachten wir Diagramme, in denen Wechselwirkungslinien zwei Vertices überspringen. Eine unendliche Reihe der Gestalt



$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \dots = \text{Diagram with hatched box} \quad (33)$$

tritt nur dann auf, wenn die Frequenzen der Elektronenlinien, in die die Wechselwirkungslinien einmünden, verschiedene Vorzeichen haben. Dies ist nur der Fall, wenn die Wechselwirkungslinien einen spinunabhängigen Vertex $V(k)$ und den Supraleitungsvertex $\Delta(q)$ einschließen. Haben die Elektronenlinien Frequenzen mit gleichem Vorzeichen, so können nur Diagramme mit einer Wechselwirkungslinie auftreten.

Für die Elemente der Matrix,

$$V = \text{Diagram with hatched box} \quad (34)$$

die aus der Summation der inneren Linien resultiert,

führen wir folgende Schreibweise ein :

$$V_{11} = K_+ = \begin{array}{c} \downarrow \\ \square \\ \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \quad (35)$$

$$V_{21} = L_- = \begin{array}{c} \uparrow \\ \square \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array}$$

Die Funktion K_+ und L_- sind Lösungen des Gleichungssystems.

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \square \\ \uparrow \end{array} K_+ = \begin{array}{c} \downarrow \\ \vdots \\ \uparrow \end{array} + \begin{array}{c} \downarrow \\ \square \\ \uparrow \end{array} K_+ + \begin{array}{c} \downarrow \\ \square \\ \uparrow \end{array} L_-$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \square \\ \downarrow \end{array} L_- = \begin{array}{c} \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \\ \square \\ \downarrow \end{array} K_+ + \begin{array}{c} \uparrow \\ \square \\ \downarrow \end{array} L_- \quad (36)$$

$$K_+(p, q) = K_+ = \frac{\pi}{mp_0} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{2}{3\tau_{s0}} \right) + \frac{1}{\tilde{\omega}_+} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{2}{3\tau_{s0}} \right) X_+ K_+ + \frac{1}{\tilde{\omega}_+} \frac{2}{3\tau_{s0}} X_+ L_-$$

$$L_-(p, q) = L_- = \frac{\pi}{mp_0} \frac{2}{3\tau_{s0}} + \frac{1}{\tilde{\omega}_+} \frac{2}{3\tau_{s0}} X_+ K_+ + \frac{1}{\tilde{\omega}_+} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{2}{3\tau_{s0}} \right) X_+ L_-$$

$$X_{\pm} = \frac{\tilde{\omega}_{\pm}}{vq} \operatorname{arctg} \frac{vq}{\tilde{\omega}_{\pm}}$$

Im schmutzigen Grenzfall und für $\tau_{s0} \gg \tau$ erhalten wir unter der Bedingung $vq\tau \ll 1$

$$K_{\pm} = \frac{\pi}{mp_0} \frac{1}{\tau} \frac{\tilde{\omega}_{\pm} (\omega \mp iI + q)}{(\omega + q)^2 - b^2 + I^2} \quad (37)$$

$$L_{\pm} = \frac{\pi}{mp_0} \frac{1}{\tau} \frac{\omega \mp b}{(\omega + q)^2 - b^2 + I^2}$$

Für große Werte von q derart, dass $v_F q \gg I \Delta_0$, $v_F q \gg \frac{1}{\tau_{s0}}$ und $v_F q \gg \omega$, wird die Matrix V diagonal.

$$V = K = \frac{\pi}{mp_0} \frac{1}{\tau} \frac{1}{1 - \gamma \operatorname{arctg} \gamma} \quad (38)$$

Analog zu (18) führen wir die Diagramme auf, die im schmutzigen Grenzfall den Integralen $I_0 \dots I_4$, entsprechen. Für Elektronenlinien und Vertices sind die oben besprochenen Renormierungen einzusetzen.

Wir machen hierbei die Fallunterscheidung $\omega_1 \cdot \omega_2 \leq 0$ und lassen Diagramme mit verschwindendem Beitrag weg.

$$\begin{aligned}
 I_0(k, \omega_1, \omega_2) &= \text{Diagram: bubble} \\
 I_1(k, \omega_1, \omega_2) &= \text{Diagram: square with vertical lines} \\
 I_2(k, \omega_1, \omega_2) &= \text{Diagram: square with horizontal lines} \\
 I_3(k, \omega_1, \omega_2) &= \text{Diagram: square with diagonal lines} \\
 I_4(k, \omega_1, \omega_2) &= \text{Diagram: square with vertical lines and external lines} \\
 I_5(k, \omega_1, \omega_2) &= \text{Diagram: square with horizontal lines and external lines} \\
 I_6(k, \omega_1, \omega_2) &= \text{Diagram: square with diagonal lines and external lines}
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \omega_1 \cdot \omega_2 > 0 \\ \omega_1 \cdot \omega_2 < 0 \end{array} \right\} \quad (39)$$

Die Vertexfunktionen, die bei der Berechnung der Dichte-Korrelationsfunktion

$$D(r, r', t) = \sum_{\alpha, \beta} \langle n_\alpha(r, t) n_\beta(r, 0) \rangle \quad (40)$$

auftreten, sind vom Typ $l=0$. Für diesen Fall und $K=0$ haben wir die Integrale in der folgenden Tabelle aufgeführt:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 \cdot \omega_2 > 0 \\
 I_1(0, \omega_1, \omega_2) &= -\frac{\pi}{4} N(0) \frac{\langle 18(r) \rangle}{\Delta^2} \sum_{\pm} \left[(g_{\pm}(\omega_1))^2 k_{\pm}(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}) + g_{\pm}(\omega_2) g_{\pm}(\omega_1) \ell(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}) \right] \\
 I_2(0, \omega_1, \omega_2) &= I_1(0, \omega_2, \omega_1) \\
 I_3(0, \omega_1, \omega_2) &= \frac{\pi}{4} N(0) \frac{\langle 18(r) \rangle}{\Delta^2} \sum_{\pm} \left[(g_{\pm}(\omega_2) g_{\pm}(\omega_1) + g_{\pm}(\omega_1) g_{\pm}(\omega_2)) \ell(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}) \right. \\
 &\quad \left. + 2 g_{\pm}(\omega_1) g_{\pm}(\omega_2) k_{\pm}(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\omega_1, \omega_2 \ll 0$$

$$I_1(0, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} N(0) \frac{\langle |u(\omega)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \sum_{\pm} \left[(g_{\pm}(\omega_1))^2 \frac{2|3\omega_1 - \omega_2| + 2I + 2a + 2b}{|\omega_1 - \omega_2|^2} - (g_{\pm}(\omega_1))^2 \frac{2b}{|\omega_1 - \omega_2|} - g_{\pm}(\omega_1) g_{\pm}(\omega_2) \frac{2b}{|\omega_1 - \omega_2|} \right]$$

$$I_2(0, \omega_1, \omega_1) = I_1(0, \omega_1, \omega_1)$$

$$I_3(0, \omega_1, \omega_1) = \frac{1}{2} N(0) \frac{\langle |u(\omega)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \sum \left[g_{\pm}(\omega_1) g_{\pm}(\omega_2) \frac{2|\omega_1 - \omega_2| + 4a}{|\omega_1 - \omega_2|^2} - (g_{\pm}(\omega_1) g_{\pm}(\omega_2) + g_{\pm}(\omega_1) g_{\mp}(\omega_2)) \frac{2b}{|\omega_1 - \omega_2|^2} \right]$$

$$g_{\pm}(\omega) = \frac{|\omega| \pm I + a + b}{(|\omega| + a)^2 - b^2 + I^2} \quad h_{\pm}(\omega) = \frac{|\omega| \pm I + a}{(|\omega| + a)^2 - b^2 + I^2}$$

$$\ell(\omega) = \frac{b}{(|\omega| + a)^2 - b^2 + I^2} \quad (41)$$

Die Integration wird gemäß (17) über die Variablen p, q und r durchgeführt. Integrieren wir über p, dann ist der Integrand im schmutzigen Grenzfall eine Funktion von $(q + 2 \operatorname{ei} A(r))^2$

Nach Maki⁶ und de Gennes²¹ erfüllt der Ordnungsparameter in der Nähe der Übergangstemperatur und ebenfalls wieder im schmutzigen Grenzfall folgende Differentialgleichung

$$\alpha \Delta(r) = D (\nabla + 2 \operatorname{ie} A)^2 \Delta(r) \quad (42)$$

Der Parameter α wurde bereits in Kapitel II für die dünne Schicht und den Supraleiter im gemischten Zustand angegeben. Setzen wir die Entwickelbarkeit des Integranden nach Potenzen von $(q + 2 \operatorname{ie} A(r))^2$ voraus so kann gemäß (42) $(q + 2 \operatorname{ie} A)^2$ ersetzt werden durch den Parameter α , der vom Vektor potential noch abhängen kann. Die Integration über q führt dann zu dem räumlichen Mittel des Ordnungsparameters. Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall $q=0$ und $l=0$, der bei der elektrischen und bei der Wärmeleitfähigkeit auftritt. Nach Tabelle (27) verschwindet in diesem Fall die Vertexkorrektur zu V. Da die Vertexfunktion V ungerade ist, liefern alle Diagramme, in denen die beiden V-Vertices durch einen Verunreinigungsvertex getrennt sind,

keinen Beitrag zu den Integralen $I_1 \dots I_3$. Für die Integrale erhalten wir in diesem Fall die folgenden Ausdrücke.

$$I_1(0, \omega_1, \omega_2) = -m n \tau p_0^{-2} \frac{\langle |A(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \sum_{\pm} (g_{\pm}(\omega_1))^2 \text{sign}(\omega_1, \omega_2)$$

$$I_2(0, \omega_1, \omega_2) = I_1(0, \omega_2, \omega_1) \quad (43)$$

$$I_3(0, \omega_1, \omega_2) = m n \tau p_0^{-2} \frac{\langle |A(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \sum_{\pm} g_{\pm}(\omega_1) g_{\pm}(\omega_2)$$

n = Elektronendichte

Betrachten wir nun den Fall großer Beträge von k mit $v_F k \gg T A_0$, $v_F k \gg 1/2 \epsilon_0$ und $v_F k \gg \omega$. Hier gehen Spinflipprozesse und die Wechselwirkung des Magnetfeldes mit den Leitungselektronen nur in die Renormierung des Δ -Vertex ein. Im Rahmen der Ultraschallabsorption haben **McLean** und **Houghton** ²² diese Diagramme berechnet für einen Supraleiter mit nichtmagnetischen Verunreinigungen im Magnetfeld. Sie zeigen, dass Diagramme mit Wechselwirkungslinien, die zwei Supraleitungsvertices einschließen, mitberücksichtigt werden, wenn folgende Ersetzung gemacht wird:

$$G(p, \omega) \rightarrow G(p, -\omega) + \frac{i}{4\pi \tilde{\omega}} \frac{\omega}{1\omega_1} \quad (44)$$

Für Diagramme mit Wechselwirkungslinien über einen Supraleitungsvertice und einen V-Vertice gilt die Ersetzung

$$V G(p, q, \omega) \rightarrow V G(p, q, \omega) - \frac{\omega_1}{1\omega_1} \frac{\omega_2}{1\omega_2} \frac{i}{2\tilde{\omega}_1} A^e \quad (45)$$

wobei die Funktion A^e die Vertexkorrektur von Tabelle (27) bedeutet. Die Ergebnisse für die Integrale $I_1 \dots I_3$ in unserem Fall unterscheiden sich von den Resultaten der obengenannten Verfasser nur in der Renormierung der Δ -Vertices.

$$I_1(k, \omega_1, \omega_2) = \frac{\pi T}{4} N(0) \sum_{\pm} (g_{\pm}(\omega_1))^2 \frac{1}{v_F} \int d\Omega \frac{1}{1+x^2 y^2} \left\{ -\Lambda_1 [V_A^e V_B^e + V_A^e A_A^e] \right. \\ \left. + \Lambda_2 [\tilde{V}_A^e \tilde{V}_B^e - \tilde{V}_A^e A_B^e] \right\}$$

$$I_2(k, \omega_1, \omega_2) = I_1(k, \omega_2, \omega_1)$$

$$I_3(k, \omega_1, \omega_2) = \frac{\pi T}{4} N(0) \sum_{\pm} g_{\pm}(\omega_1) g_{\pm}(\omega_2) \frac{1}{v_F} \int d\Omega \frac{1}{1+x^2 y^2} \left\{ \Lambda_1 [V_A^e V_B^e + V_A^e A_A^e] \right. \\ \left. + \Lambda_2 [\tilde{V}_A^e \tilde{V}_B^e - \tilde{V}_A^e A_B^e] \right\}$$

$$\Lambda_n = \frac{1}{2} (1 - (-)^n \frac{\omega_1}{i\omega_1} \frac{\omega_2}{i\omega_2}) \quad (46)$$

Wir berechnen nun die Zustandsdichte in dem Bereich, in dem die Energielücke verschwindet. Die Zustandsdichte erhalten wir aus dem Imaginärteil der Green-Funktion gemäß

$$N(r, \omega) = - \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left\{ G_{\uparrow}(r, r, \omega) + G_{\downarrow}(r, r, \omega) \right\} \quad (47)$$

Wir interessieren uns hier für das räumliche Mittel der Zustandsdichte. Renormierung der Green-Funktion in der Näherung (16) führt auf

$$\overline{N(r, \omega)} = N(0) \text{Re} \left\{ 1 - \frac{\langle I \Delta(r) \rangle^2}{\Delta_0^2} \sum_{\pm} \frac{(-i\omega \pm I + a + b)^2}{((-i\omega + a)^2 - b^2 + I^2)} \right\} \quad (48)$$

Im Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ erhalten wir für die Zustandsdichte an der Fermikante

$$\frac{\overline{N(r, 0)} - N(0)}{N(0)} = - \frac{\langle I \Delta(r) \rangle^2}{2\Delta_0^2} \frac{(a+b)^2 - I^2}{(a^2 - b^2 + I^2)^2} \quad (49)$$

Die rechte Seite kann für $T=0$ nur im Fall der dünnen Schicht positiv werden und zu einer größeren Zustandsdichte an der Fermikante führen als im normalleitenden Zustand. Die numerische Auswertung zeigt, dass dies zutrifft, solange $b \leq 0.1$.

IV. Transporteigenschaften von Hochfeldsupraleitern

a) Tunnelleitfähigkeit

Die Tunnelleitfähigkeit eines Supraleiter-Normalleiter-Kontaktes erhalten wir mit Hilfe der Beziehung für den Tunnelstrom

$$I(V) = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega N(\omega) (f(\omega) - f(\omega - V)) \quad (1)$$

Hierbei bedeutet R eine Konstante, in die die Eigenschaften der Tunnelschicht und der normalleitenden Seite eingehen. Für die Tunnelleitfähigkeit bei verschwindender Spannung ergibt sich dann folgende einfache Relation

$$\left. \frac{dI(V)}{dV} \right|_{V=0} = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega N(\omega) \frac{\partial f}{\partial \omega} \quad (2)$$

die sich im Grenzfall $T \rightarrow 0$ auf

$$\left. \frac{dI(V)}{dV} \right|_{V=0} \approx R N(0)$$

reduziert und im wesentlichen von der Zustandsdichte an der Fermikante abhängt. Beim BCS-Supraleiter verschwindet die Zustandsdichte an der Fermikante und damit auch die Tunnelleitfähigkeit für $V = 0$. Nach Kapitel III kann der Pauli-Paramagnetismus im supraleitenden Zustand zu einer größeren Zustandsdichte an der Fermikante führen als im normalleitenden Zustand. Daraus resultiert dann auch eine größere Tunnelleitfähigkeit bei $V=0$

im supraleitenden Zustand. Mit Hilfe der Polentwicklung der Fermifunktion und der Zustandsdichte Kap. III (48) erhalten wir für das Verhältnis der Tunnelleitfähigkeiten bei $V=0$ in den beiden Zuständen, wenn wir noch über die Probe mitteln:

$$\left. \frac{dI_S/dV}{dI_N/dV} \right|_{V=0} = 1 - \frac{\langle |A(r)|^2 \rangle}{4} T \sum_n \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\pm} \int d\omega \frac{(-i\omega \pm I + a + b)^2}{((-i\omega \pm a)^2 - b^2 + I^2)^2} \cdot \frac{1}{(\omega + i\omega_n)^2} \right\} \quad (4)$$

Partialbruchzerlegung und Summation führt nach Auswertung der Integrale auf

$$1 - \left. \frac{dI_S/dV}{dI_N/dV} \right|_{V=0} = - \frac{\langle |A(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{1}{2(\gamma T)^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - I^2}} \right) \psi^{(2)} \left(\frac{1}{2} + \beta_- \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - I^2}} \right) \psi^{(2)} \left(\frac{1}{2} + \beta_+ \right) \right\} \quad (5)$$

Hierbei haben alle auftretenden Größen die in Kapitel II angegebene Bedeutung.

Im Grenzfall kleiner Temperaturen finden wir

$$1 - \left. \frac{dI_S/dV}{dI_N/dV} \right|_{V=0} = \frac{\langle |A(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{1}{2} \frac{(a+b)^2 - I^2}{(a^2 - b^2 + I^2)^2} \quad (6)$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit der Zustandsdichte III, 48, dann folgt für das Verhältnis der Tunnelleitfähigkeiten:

$$\left. \frac{dI_S/dV}{dI_N/dV} \right|_{V=0} = \frac{N_S(0)}{N(0)} \quad (7)$$

Für Temperaturen $T \gg T_{c0} - T$ gilt:

$$1 - \left. \frac{dI_S/dV}{dI_N/dV} \right|_{V=0} = - \frac{\langle |A(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{1}{2(\gamma T)^2} \psi^{(2)} \left(\frac{1}{2} \right) \quad (8)$$

Setzen wir die im Kapitel II angegebene Entwicklung von $\langle |A(r)|^2 \rangle$ um T_c in (5) ein, dann ergibt sich

$$1 - \frac{dI_S/dV}{dI_N/dV} \Big|_{V=0} = \frac{1}{2\beta} \left| 1 - T/T_c \right| \frac{|k(t_c, c, b)|}{f_{L, //}(t_c, c, b)} \frac{h_T(t_c, c, b)}{f_{L, //}(t_c, c, b)} \quad (4)$$

$$h(t_c, c, b) = - \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1}} \right) \psi^{(2)} \left(\frac{1}{2} + \beta_- \right) - \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1}} \right) \psi^{(2)} \left(\frac{1}{2} + \beta_+ \right)$$

Wir diskutieren nun die Tunnelleitfähigkeit bei verschwindender Spannung an Hand der Funktion

$$C_T(t_c, c, b) = \frac{|k(t_c, c, b)| h_T(t_c, c, b)}{f_{L, //}(t_c, c, b)} \quad (10)$$

die die Änderung der Tunnelleitfähigkeit bei $V=0$ mit der Temperatur angibt. Betrachten wir zuerst die dünne Schicht und kehren zu Abbildung 3 zurück, die die Nullstellen der in $C_T(t_c, c, b)$ auftretenden Funktionen bei unendlich großer Spinflipzeit zeigt. Wir finden, dass es ein Gebiet gibt, in dem Phasenübergänge zweiter Ordnung vorliegen und wo gleichzeitig auch $h_T < 0$ ist. In diesem Gebiet ist die Tunnelleitfähigkeit bei verschwindender Spannung im supraleitenden größer als im normalleitenden Zustand. Für die vier in Abb. 3 eingezeichneten Parameterwerte $C_1 \dots C_4$ ist die Funktion $C_T(t_c, c, b)$ in Abb. 10 gegen t_c aufgetragen. Im ersten Fall $C_1 = 2.9$ hat die Funktion $C_T(t_c, c, b)$ keine Nullstellen und keine Pole und zeigt den gleichen Verlauf wie ohne Pauli-Paramagnetismus. Für $C_2 = 2.2$ finden wir, dass die Tunnelleitfähigkeit bei $V=0$ für tiefe Temperaturen größer werden kann als im normalleitenden Zustand und im ganzen Temperaturintervall Phasenübergänge zweiter Ordnung vorliegen. In den Fällen $C_3 = 1.2$, $C_4 = 0.4$ tritt wieder die gleiche Anomalie auf, jedoch wird jetzt das Gebiet der Phasenübergänge erster Ordnung erreicht, wo unsere Entwicklung nicht mehr gilt. Je näher wir dem Gebiet der Phasenübergänge erster Ordnung kommen, desto größer wird die Änderung von $C_T(t_c, c, b)$ mit der Temperatur nahe T_c .

Nach Kapitel III verschwindet mit abnehmender Spinflipzeit die Überhöhung der Zustandsdichte an der Fermikante. Der Vergleich der Abb. 11, in der die Nullstellen der Funktion $h_T(t_c, c, b)$ in der t_c, c -Ebene für verschiedene Werte von b aufgetragen sind, und der Abb. 4, in der das gleiche für die Funktion $f(t_c, c, b)$ gemacht worden ist, zeigt, dass die Gebiete mit $h_T < 0$ bereits für $b = 0.1$ fast vollständig in dem Gebiet der Phasenübergänge erster Ordnung liegen.

Für zwei verschiedene Werte von b ist in den Abb. 13, 14 die Funktion $C_T(t_c, c, b)$ für mehrere Werte von c gegen t_c aufgetragen. Mit größer werdendem Parameter c wird die Funktion $C_T(t_c, c, b)$ von b unabhängig und konvergiert gegen die Grenzkurve $c = \infty$, gegen die auch $C_T(t_c, c, b)$ konvergiert bei Übergang zu kleineren Spinflipzeiten.

Beim Supraleiter zweiter Art liegen alle Punkte mit $h_T < 0$ im Gebiet der Phasenübergänge erster Ordnung und wir finden die Anomalie der Tunnelleitfähigkeit bei $V=0$ nicht mehr. Abb. 12 zeigt die Nullstellen der Funktion $h_T(t_c, c, b)$ im Fall des Supraleiters zweiter Art in der t_c, c -Ebene für mehrere Werte von b . In Abb. 15, 16 ist die Funktion $C_T(t_c, c, b)$ im Fall des Supraleiters zweiter Art aufgetragen gegen t_c für mehrere Werte von c . Wir finden das gleiche Verhalten wie bei der dünnen Schicht bei einer endlichen Spinflipzeit. Im Grenzfall $b \rightarrow \infty$ hängt $C_T(t_c, c, b)$ von folgender Größe ab:

$$\beta^2 = b^{-1} c^{-2} \quad (11)$$

und verläuft innerhalb der in Abb. 17 angegebenen Grenzkurven $\beta \rightarrow 0$ und $\beta \rightarrow \infty$

b) Knight - Shift

Der Knight-Shift gibt die Verschiebung der Kernresonanzfrequenz an, wenn zum einen der Kern sich in einem Metall, zum anderen in einem freien Ion befindet. Dafür verantwortlich ist zur Hauptsache die Spinpolarisation der Leitungselektronen. Diese erzeugt am Ort des Kern ein Feld, das der Verschiebung der Kernresonanzfrequenz proportional ist.

Nach der BCS-Theorie müsste für $T=0$ der Knight-Shift verschwinden, da alle Elektronen mit entgegengesetztem Spin gepaart sind. Der in den Experimenten beobachtete Knight-Shift für $T=0$ führt zu der Annahme einer endlichen Spinflipzeit²³. Da die Elektronen jetzt in zeitumgekehrten Zuständen paaren, tritt in einem Magnetfeld eine Spinpolarisation auf.

Im Grenzfall kleiner Felder haben Abrikosov und Gorkov¹⁹ dieses Problem untersucht für Supraleiter mit nichtmagnetischen Verunreinigungen. Fulde und Maki²⁴ erweiterten diese Theorie auf Felder beliebiger Stärke.

Die Magnetisierung, die durch die Ausrichtung der Elektronenspins in einem Magnetfeld hervorgerufen wird, ist proportional der Differenz der Zahl der Elektronen mit zum Feld parallelem und antiparallelem Spin.

$$M = \mu (n_{\uparrow} - n_{\downarrow}) \quad (1)$$

Wir berechnen die über die Probe gemittelte Magnetisierung und drücken die Teilchenzahlen mit Hilfe der Zustandsdichte und der Fermifunktion aus

$$M = \mu \int d\omega \, f(\omega) \{ \overline{N_{\uparrow}(\epsilon, \omega)} - \overline{N_{\downarrow}(\epsilon, \omega)} \} \quad (2)$$

Führen wir die Polentwicklung der Fermifunktion ein, dann erhalten wir nach Durchführung der Mittelung über die Probe und Integration über die Energievariable ω für das Verhältnis der Magnetisierung im supra- und normalleitenden Zustand folgenden Ausdruck:

$$M_s/M_n = - \frac{2T}{N(0)\mu H} \sum_{\omega_n} \operatorname{Re} \left\{ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (G_{\uparrow}(p, \omega_n) - G_{\downarrow}(p, \omega_n)) \right\} \quad (3)$$

$$M_n = \mu^2 N(0) H$$

Setzen wir die in Kapitel III 48 angegebene Entwicklung der Green-Funktion nach Potenzen von Δ ein, so folgt nach Ausführung der Integration im Impulsraum:

$$1 - \frac{M_s}{M_n} = \frac{\langle |\Delta(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{T}{2I} \sum_{\omega_n} \left([g_+(\omega_n)]^2 - [g_-(\omega_n)]^2 \right) \quad (4)$$

wobei die Funktionen $g_{\pm}(\omega_n)$ die in Kapitel III 41 angegebene Bedeutung haben.

Partialbruchzerlegung und Summation führt auf:

$$1 - \frac{M_s}{M_n} = \frac{\langle |\Delta(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{1}{4(2\gamma t)^2 \sqrt{b^2 - I^2}} \left\{ \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - I^2}}\right) \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho_-\right) - \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - I^2}}\right) \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho_+\right) \right. \\ \left. + \frac{2\gamma t}{(b^2 - I^2)} \left(\psi\left(\frac{1}{2} + \rho_-\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \rho_+\right) \right) \right\} \quad (5)$$

Das gleiche Resultat gewinnt auch Maki⁸ aus den Ginzburg-Landau-Gleichungen.

Im Grenzfall $T \rightarrow 0$ gilt:

$$1 - \frac{M_s}{M_n} = \frac{\langle |\Delta(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{1}{2} \frac{1}{b^2 - I^2} \left\{ \frac{b - I^2 + ab}{a^2 - b^2 + I^2} + \frac{b}{\sqrt{b^2 - I^2}} \ln \frac{a \cdot \sqrt{b^2 - I^2}}{a + \sqrt{b^2 - I^2}} \right\} \quad (6)$$

Für Temperaturen nahe T_{c0} mit $T \gg T_{c0} - T$ folgt

$$1 - \frac{M_s}{M_n} = \frac{\langle |\Delta(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{1}{4b} \frac{1}{2\gamma t} \left\{ 2\psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2\gamma t}{b} \left[\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{b}{\gamma t}\right) \right] \right\} \quad (7)$$

Mit kürzer werdender Spinflipzeit verschwindet der Unterschied der Magnetisierungen im supraleitenden und normalleitenden Zustand. Ersetzen wir den Mittelwert $\langle |A(r)|^2 \rangle$ gemäss Kap. II (5), so erhalten wir für das Verhältnis der Magnetisierungen, das gleich dem Verhältnis des Spinsuszeptibilitäten in den beiden Zuständen ist:

$$1 - \chi_s / \chi_n = \frac{2}{\beta} |1 - T/T_c| \frac{|k(t_c, c, b)| h_{KS}(t_c, c, b)}{f_{L, n}(t_c, c, b)} \quad (8)$$

$$h_{KS}(t, c, b) = \frac{\delta T}{T_0^2 I^2} \left\{ \left(1 + \frac{c}{T_0^2 I^2}\right) \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho\right) - \left(1 - \frac{c}{T_0^2 I^2}\right) \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho_1\right) + \frac{2Tc}{(T_0^2 I^2)} \left(\psi\left(\frac{1}{2} + \rho\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \rho_1\right)\right) \right\}$$

Die Funktion $h_{KS}(t, c, b)$ ist für alle Werte der Veränderlichen positiv und damit ist die Suszeptibilität im supraleitenden stets kleiner als im normalleitenden Zustand. Die Überhöhung der Zustandsdichte an der Fermikante im supraleitenden Zustand führt hier nicht zu einer Anomalie des Knight-Shifts.

In Abb. 18 ist die Funktion

$$C_{KS}(t_c, c, b) = \frac{|k(t_c, c, b)| h_{KS}(t_c, c, b)}{f_{L, n}(t_c, c, b)}$$

als Funktion t_c für mehrere Werte von c für $b=0$ aufgetragen im Fall der dünnen Schicht. Wir finden die bereits erwähnten Pole von C_{KS} , die von den Nullstellen der f -Funktion herrühren. In dem Bereich, in dem keine Nullstellen von $f(t_c, c, b)$ und $k(t_c, c, b)$ vorliegen, ist C_{KS} nahezu unabhängig von c .

Für eine endliche Spinflipzeit wird der Knight-Shift entsprechend kleiner. Für $b=0.3$ ist in der Abbildung 19 $C_{KS}(t_c, c, b)$ zu sehen. Der Knight-Shift eines Supraleiters zweiter Art verläuft qualitativ wie bei der dünnen Schicht für $b \neq 0$.

c) Wärmeleitfähigkeit

An dem Wärmetransport in Metallen sind sowohl Elektronen als auch Phononen beteiligt. Die Wärmeleitfähigkeit besteht aus den zwei Beiträgen

$$\kappa = \kappa_e + \kappa_p \quad (1)$$

wobei mit e Elektronen und mit p Phononen bezeichnet werden. Der elektronische Anteil der Wärmefähigkeit hängt von der Streuung der Elektronen an den Phononen und Verunreinigungen ab. Für Temperaturen $T \ll \Theta_D$ gilt

$$\frac{1}{\kappa_e} = a T^2 + \frac{b}{T} \quad (2)$$

Hierbei rührt der erste Term von der Streuung der Elektronen an den Phononen her und ist bei hohen Temperaturen wichtig. Das zweite Glied beschreibt den Einfluss von Verunreinigungen und spielt bei tiefen Temperaturen eine wesentliche Rolle. Die thermische Leitfähigkeit steigt bei tiefen Temperaturen linear an, durchläuft ein Maximum und nimmt dann aufgrund der Elektronen-Phonon Streuung wieder ab.

Eine qualitative Aussage über den Verlauf der Wärmeleitfähigkeit im supraleitenden Zustand lässt sich mit Hilfe des Zweiflüssigkeitsmodell machen. Die supraleitenden Elektronen scheiden aus dem Transportprozess aus, da sie weder thermische Energie befördern noch an Phononen gestreut werden können. Dies hat zur Folge, dass mit abnehmender Temperatur die elektrische Wärmeleitfähigkeit schneller verschwindet als im normalleitenden Zustand. Wir beschränken uns hier auf Systeme, bei denen der elektronische Anteil zur Wärmeleitfähigkeit überwiegt und die Elektronen lediglich an Verunreinigungsatomen gestreut werden können.

Die Wärmeleitfähigkeit eines Supraleiters mit Verunreinigungen wird unter diesen Voraussetzungen beschrieben durch eine Formel, die Bardeen, et al. (25) abgeleitet haben.

$$\frac{\kappa_s}{\kappa_n} = \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \varepsilon^2 / \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \varepsilon^2 \quad (3)$$

Die Funktion $f(\varepsilon)$ bedeutet die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion für Elektronen. Kadanoff²⁶ zeigte wenig später, dass diese Formel für alle freien Weglängen Gültigkeit besitzt. Die Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit einer dünnen Schicht von parallel zur Oberfläche angelegten Magnetfeld untersuchte Maki²⁷ an einem Supraleiter mit nichtmagnetischen Verunreinigungen. Ambegaokar und Griffin²⁸ erweiterten diese Theorie für die dünne Schicht mit magnetischen Verunreinigungen. In Supraleitern zweiter Art, in denen der Ordnungsparameter nicht mehr konstant ist, wird die Wärmeleitfähigkeit anisotrop.

Fließt ein Wärmestrom parallel zu den Wirbeln, so stellen die Wirbelkerne einen besseren Wärmeleiter dar als die Umgebung. Caroli und Cyrot²⁹ zeigten, dass bei Berücksichtigung bis zu Gliedern der Ordnung $|\Delta|^2$ die Anisotropie keine Rolle spielt. Die Wärmeleitfähigkeit berechnen wir mit Hilfe der Kubo-Formel, die das Verhältnis von Energiestrom zu negativen Temperaturgradienten angibt²⁸

$$\kappa = \frac{2}{3VT} \text{Im} \int_{-\infty}^0 dt t \int d^3r_1 d^3r_2 \langle \vec{u}(r_1, 0) \vec{u}(r_2, t) \rangle \quad (4)$$

Ambegaokar und Griffin²⁸ haben gezeigt, dass mit dem Wärmestrom kein Materiestrom verbunden ist, wenn Glieder der Größenordnung kT/μ_0 (μ_0 = chemisches Potential) vernachlässigt werden. In dieser Näherung stellt (4) die

Wärmeleitfähigkeit dar. Die Energiestromdichte genügt der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{h}(r,t) + \nabla \cdot \vec{u}(r,t) = 0 \quad (5)$$

wobei $h(r,t)$ die Hamiltondichte bedeutet. Die Gleichung führt auf den Operator der Energiestromdichte, der folgende Form hat

$$\vec{u}(r,t) = -\frac{1}{2m} \text{Sp} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger(r,t) \nabla \psi(r,t) + \nabla \psi^\dagger(r,t) \frac{\partial}{\partial t} \psi(r,t) \right\} \quad (6)$$

Die Wärmeleitfähigkeit berechnen wir nach der in Kapitel III geschilderten Methode und führen dazu folgende Korrelationsfunktion ein:

$$V(r,r',t) = \langle \vec{u}(r,0) \vec{u}(r',t) \rangle \quad (7)$$

Mit Hilfe der Fouriertransformierten der retardierten Green-Funktion

$$G_R(r,r',t) = \delta(-t) V(r,r',t) \quad (8)$$

deren Fouriertransformierte in der komplexen ω -Ebene in der oberen Halbebene analytisch und mit der kausalen Green-Funktion identisch ist, erhalten wir für die Wärmeleitfähigkeit folgenden Ausdruck:

$$K = \frac{1}{6T} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{G(k=0, \omega+i\varepsilon) - G(k=0, \omega-i\varepsilon)}{\omega} \quad (9)$$

hierbei bedeutet

$$G(k=0, \omega) = \int d^3x_1 d^3x_2 G(x_1, x_2, \omega) \quad (10)$$

das räumliche Mittel. Wir berechnen wieder die kausale temperaturabhängige Green-Funktion, die sich im Ortsraum in der folgenden Form schreiben lässt.

$$G(r, r', \tau) = \frac{1}{4m^2} \left(\frac{\partial}{\partial \tau_1} \nabla_1 + \frac{\partial}{\partial \tau_1} \nabla_1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial \tau_2} \nabla_2 + \frac{\partial}{\partial \tau_2} \nabla_2 \right) G^{\text{II}}(1, 1'; 2, 2') \quad (11)$$

Hierbei bedeutet $G^{\text{II}}(1, 1'; 2, 2')$ wieder die Zweiteilchen - Green-Funktion. Bei dieser Schreibweise ist ein Term weggelassen worden, der aus der Nichtvertauschbarkeit der zeitlichen Ableitung und dem Zeitordnungsoperator resultiert. Dieser Term fällt bei der Differenzbildung in (7) heraus. Entwicklung nach Einteilchen-Green-Funktion und nach diskreten Frequenzen ω_k führt auf

$$G(r, r', \omega_k) = \frac{1}{4m^2} \sum_{\omega_1, \omega_2} \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_k) \times \\ \times \left\{ \omega_1^2 \left[G(r, r', \omega_1) \nabla_r \nabla_{r'} G(r', r', \omega_2) - F(r, r', \omega_1) \nabla_r \nabla_{r'} F^+(r', r', -\omega_2) \right. \right. \\ \omega_2^2 \left[G(r', r', \omega_2) \nabla_{r'} \nabla_r G(r, r', \omega_1) - F^+(r', r', -\omega_2) \nabla_{r'} \nabla_r F(r, r', \omega_1) \right. \\ \left. \left. - \omega_1 \omega_2 \left[\nabla_{r'} G(r, r', \omega_1) \nabla_r G(r', r', \omega_2) + \nabla_r G(r, r', \omega_2) \nabla_{r'} G(r', r', \omega_1) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \nabla_r F(r, r', -\omega_2) \nabla_{r'} F^+(r', r', \omega_1) - \nabla_{r'} F(r, r', -\omega_2) \nabla_r F(r, r', \omega_1) \right] \right\} \quad (12)$$

Wir transformieren (11) in den Fourierraum und berechnen $K=0$ Komponente. Die Vertexfunktionen $\vec{P} = \{P_x, P_y, P_z\}$ sind vom Typ 1=1 und wir erhalten im schmutzigen Grenzfall mit Berücksichtigung des Pauli-Terms und Spinflipprozessen für den Mittelwert (9) mit Hilfe der in Kapitel III abgeleiteten Renormierungsvorschriften.

$$G(0, \omega_k) = \frac{g k_n}{2\pi} \sum_{\omega_1, \omega_2} \sum_{\pm} \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega_1 \omega_2}{k_{n1} k_{n2}} \right) (\omega_1 + \omega_2)^2 \left[1 - (g_{\pm}(\omega_1) + g_{\pm}(\omega_2))^2 \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega_1 \omega_2}{k_{n1} k_{n2}} \right) (\omega_1 - \omega_2)^2 (g_{\pm}(\omega_1) - g_{\pm}(\omega_2))^2 \right\} \quad (13)$$

Der zweite Term liefert bei der Bildung des Grenzübergangs in (8) keinen Beitrag. Mit Hilfe der Polentwicklung des hyperbolischen Tangens

$$\tanh \frac{\omega}{2T} = 2T \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega + i\omega_h} \quad (14)$$

können wir die unendliche Reihe (12) in ein Integral transformieren. Das Verfahren wird erschwert, weil die Funktionen $g_{\pm}(\omega)$ nur vom Absolutbetrag der Frequenz ω abhängen. Bedeutet $a(|\omega_1|, |\omega_2|)$ das allgemeine Reihenglied, dann kann der Absolutbetrag weggelassen werden, wenn in den einzelnen Summationsintervallen folgende neue Funktionen eingeführt werden:

$$\begin{aligned} a^{++} &= a(\omega_1, \omega_2) & \omega_1 > 0, \omega_2 > 0 \\ a^{+-} &= a(\omega_1, -\omega_2) & \omega_1 > 0, \omega_2 < 0 \\ a^{-+} &= a(-\omega_1, \omega_2) & \omega_1 < 0, \omega_2 > 0 \\ a^{--} &= a(-\omega_1, -\omega_2) & \omega_1 < 0, \omega_2 < 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Die Differenz der Green-Funktion in der oberen und unteren Halbebene bei infinitesimaler Annäherung an die reelle Achse ist nach Caroli und Cyrot ²⁹

$$G(0, \omega_k + i\epsilon) - G(0, \omega_k - i\epsilon) = \frac{1}{4\pi i T} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tanh \frac{\omega}{2T} (A(\omega_k - i\omega) - A(i\omega))$$

$$A = a^{++} + a^{--} - a^{-+} - a^{+-}$$

Daraus erhalten wir mit Hilfe von (12) den Wärmeleitungs-koeffizienten

$$K_S = K_n \frac{3}{\pi^2} \frac{1}{T^3} \int_0^{\infty} d\omega \frac{1}{ch^2 \frac{\omega}{2T}} \int_0^{\omega} d\omega' \omega' (1 - \langle |D(\omega)|^2 \rangle) \sum_{\pm} F_{\pm}(\omega)$$

$$F_{\pm}(\omega) = \frac{1}{2} (g_{\pm}(i\omega) + g_{\pm}(-i\omega))^2 + \frac{1}{2} i\omega (g_{\pm}(i\omega) + g_{\pm}(-i\omega)) (g'_{\pm}(i\omega) - g'_{\pm}(-i\omega)) \quad (17)$$

Setzen wir die Funktionen $g_{\pm}(\omega)$ aus Kapitel III ein, dann ergibt sich nach einer umfangreichen Rechnung folgender Ausdruck für die Wärmeleitfähigkeit:

$$\kappa_S/\kappa_n = 1 - \frac{\langle |\Delta(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{3}{(2\gamma t)^2} \left\{ \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - I^2}}\right) \rho_+ \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho_+\right) + \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - I^2}}\right) \rho_- \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho_-\right) \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - I^2}}\right) \rho_+^2 \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \rho_+\right) + \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - I^2}}\right) \rho_-^2 \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \rho_-\right) \right\}$$

$$\rho_{\pm} = \frac{1}{2\gamma t} (a \pm \sqrt{b^2 - I^2}) \quad (18)$$

Im Grenzfall $I=0$ erhalten wir das Resultat von Maki ²⁷ Caroli und Cyrot ²⁹ wieder.

$$\kappa_S/\kappa_n = 1 - \frac{\langle |\Delta(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{6}{(2\gamma t)^2} \left\{ \rho \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho\right) + \rho^2 \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \rho\right) \right\} \quad (19)$$

Für kleine Temperaturen können wir für die Ableitungen der Digammafunktion die asymptotischen Entwicklungen verwenden und finden für $T=0$

$$\kappa_S/\kappa_n = 1 - \frac{\langle |\Delta(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} 3 \frac{(a+b)^2 - I^2}{(a^2 - b^2 + I^2)^2} \quad (20)$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit der Zustandsdichte dann ergibt sich

$$\kappa_S/\kappa_n = 6 \frac{N_S(a)}{N(0)} - 5 \quad (21)$$

Für Temperaturen $T \gg T_{co} - T$ gilt

$$\kappa_S/\kappa_n = 1 - \frac{3}{8\pi} \frac{\langle |\Delta(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^3 (a - \sqrt{b^2 - I^2}) \quad (22)$$

Verwenden wir die in Kapitel II angegebene Näherung für $\langle |\Delta(r)|^2 \rangle$ dann ergibt sich für die Wärmeleitfähigkeit folgender Ausdruck:

$$1 - \frac{\kappa_s}{\kappa_n} = 3/4 - T/T_c \left| \frac{1/\kappa(t_c, c, b)}{f_{L,11}(t_c, c, b)} \right| \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \kappa_w(t_c, c, b) = & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1}} \right) \left[\beta_+ \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \beta_+\right) + \beta_+^2 \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \beta_+\right) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1}} \right) \left[\beta_- \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \beta_-\right) + \beta_-^2 \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \beta_-\right) \right] \end{aligned}$$

Wir diskutieren zuerst den Fall der dünnen Schicht mit parallel zur Oberfläche angelegtem Magnetfeld und betrachten dazu den Koeffizienten

$$C_w(t_c, c, b) = \frac{1/\kappa(t_c, c, b)}{f_{L,11}(t_c, c, b)}$$

In Abb. 20 sind die Nullstellen der in (22) auftretenden Funktionen in der t_c, c -Ebene eingezeichnet für unendlich große Spinflipzeit. Es gibt wieder einen Bereich, in dem $f_{11} \geq 0$ und $\kappa_w \leq 0$ ist. In diesem Bereich ist die Wärmeleitfähigkeit im supraleitenden größer als im normalleitenden Zustand, abweichend von der BCS-Theorie. Wir führen diesen Effekt wieder darauf zurück, dass die Zustandsdichte an der Fermikante im Supraleiter größer ist als im Normalleiter. Bei tiefen Temperaturen spielen nur die Zustände nahe der Fermikante eine Rolle und führen zu dem anomalen Verhalten der Wärmeleitfähigkeit.

In Abb. 21a ist $C_w(t_c, c, b)$ für $b=0$ und für mehrere Werte des Parameters c als Funktion von t_c aufgetragen. Die Pole deuten wieder an, dass bei Übergang zu tiefen Temperaturen Phasenübergänge erster Ordnung vorliegen. Mit abnehmender Spinflipzeit verschwindet die Anomalie in der Zustandsdichte. Die Funktion $\kappa_w(t_c, c, b)$ ist positiv für alle Werte von t_c und c , wenn $b > 0.456$ ist.

Für $b = 0.1$ liegt der Bereich, in dem $h_w < 0, f_{||} > 0$ ist, fast vollständig in dem Bereich der Phasenübergänge erster Ordnung, und wir erwarten die Anomalie in der Wärmeleitfähigkeit für $b < 0.1$ im Gebiet der Phasenübergänge zweiter Ordnung (Abb.22).

Der Verlauf der Funktion $C_w(t_c, c, b)$ als Funktion von t_c für eine endliche Spinflipzeit und für mehrere Parameterwerte c ist in Abb.21b wiedergegeben. Mit wachsendem Wert des Parameters c verschwinden die Phasenübergänge erster Ordnung und $C_w(t_c, c, b)$ nähert sich der Grenzkurve $C_w(t_c, \infty, b)$, die von b unabhängig ist. Bei Übergang zu kürzeren Spinflipzeiten gilt

$$\lim_{b \rightarrow \infty} C_w(t_c, c, b) = \lim_{c \rightarrow \infty} C_w(t_c, c, b) = C_w(t_c, \infty)$$

Beim Supraleiter im gemischten Zustand tritt die Anomalie der Wärmeleitfähigkeit nicht mehr auf, da alle Bereiche mit

$h_w(t_c, c, b)$ im Bereich $f_{\perp} < 0$ liegen, in dem Phasenübergänge erster Ordnung existieren (Abb.23).

Die Funktion $C_w(t_c, c, b)$ zeigt jetzt ein ähnliches Verhalten wie die dünne Schicht mit $b \neq 0$ (Abb.25).

Im Grenzfall unendlich großer Spinbahnwechselwirkung hängt $C_w(t_c, c, b)$ von dem Parameter

$$\beta^2 = b^{-1}c$$

ab und verläuft innerhalb der in Abbildung 25 angegebenen Grenzkurven.

d.) Kernspinrelaxationszeit

Eine im Magnetfeld erfolgte Ausrichtung der Kernspins wird durch folgenden Wechselwirkungsmechanismus wieder rückgängig gemacht. Die Leitungselektronen nahe der Fermikante können über die Spin-Spin Wechselwirkung mit dem Kernspinsystem Energie austauschen. Bei einem solchen Prozess ändern sich Elektronenspin und Kernspin derart, dass der Gesamtspin erhalten bleibt. Die Geschwindigkeit, mit der das System dem Endzustand zustrebt, ist proportional der Zahl der besetzten Anfangszustände einer Spinrichtung und der nicht besetzten Zustände der anderen Spinrichtung, summiert über alle Energien. Führen wir für diesen Relaxationsmechanismus eine Relaxationszeit T_1 ein, dann erhalten wir folgenden Ausdruck im normalleitenden Zustand

$$\frac{1}{T_1} = \frac{3}{2} C \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon (N_{\uparrow}(\varepsilon) N_{\downarrow}(\varepsilon + \Omega) + N_{\downarrow}(\varepsilon) N_{\uparrow}(\varepsilon + \Omega)) f(\varepsilon) (1 - f(\varepsilon + \Omega)) \quad (1)$$

Die Konstante C hängt von der Wechselwirkung der Elektronenspins mit den Kernspins ab. Die Zeemanenergie Ω der Kerne kann als klein angesehen werden gegenüber dem Energieintervall, in dem sich die Zustandsdichte und die Fermifunktionen wesentlich ändern. Das Produkt der Fermifunktionen ist nur in einem Intervall T um die Fermikante von Null verschieden und kann dort näherungsweise als konstant angesehen werden. Mit dieser Approximation erhalten wir für die Relaxationszeit

$$\frac{1}{T_1} = \frac{3}{2} C \int_{-T}^T d\varepsilon [N(\varepsilon)]^2 \quad (2)$$

Bei tiefen Temperaturen können wir im Integranden $N(\epsilon)$ konstant setzen und erhalten für ein normales Metall in dieser Näherung

$$\frac{1}{T_1} = 3.4 [N(0)]^2 T \quad (3)$$

Im supraleitenden Zustand tritt im Integranden noch der Kohärenzfaktor auf, der von der Größenordnung 1 ist, so dass (3) in Näherung weiter gilt. In einem BCS-Supraleiter ist bei $T \gg T_{co} - T$ die Energielücke Δ klein gegenüber T und das Gebiet, in dem die Zustandsdichte sehr groß ist, liegt in dem Integrationsbereich. Dies führt dazu, dass die Kernspinrelaxationszeit T_{1s} im supraleitenden Zustand kleiner wird als im normalleitenden und für $T = T_{co}$ bei Übergang zu tiefen Temperaturen $1/T_{1s}$ unendlich schnell ansteigt.

$$\lim_{T \rightarrow T_{co}} \frac{d(1/T_{1s})}{dT} = \infty \quad (4)$$

Bei tiefen Temperaturen $T \rightarrow 0$ verschwindet $1/T_{1s}$, da die Gebiete mit hoher Zustandsdichte mit kleinem Gewicht in die Integration in (1) eingehen. Die BCS-Theorie der Kernspinrelaxation³⁰ ist von Ambegaokar und Griffin³¹ auf Supraleiter mit magnetischen Verunreinigungen für alle Temperaturen erweitert worden im Falle der dünnen Schicht. Cyrot³² diskutiert den schmutzigen Grenzfall und Eppel et.al.³³ berechnen die Kernspinrelaxationszeit für alle Weglängen im Bereich kleiner Δ .

Bei der Bestimmung der Kernspinrelaxationszeit gehen wir von der folgenden allgemeinen Beziehung¹ aus, wobei uns wieder nur das räumliche Mittel der Relaxationszeit interessiert³⁴.

$$1/T_1 = C \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \vec{S}(r,0) \vec{S}(r,t) \rangle \quad (5)$$

$\vec{S}(r,t)$ ist der Spindichteoperator

$$\vec{S}(r,t) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \psi_{\alpha}^{\dagger}(r,t) \sigma_{\alpha\beta} \psi_{\beta}(r,0) \quad (6)$$

Es ist hier wieder die $\omega=0$ Komponente der Fourier-transformierten der Korrelationsfunktion

$$Q(r,r,t) = C \langle \vec{S}(r,t) \vec{S}(r,0) \rangle \quad (7)$$

zu berechnen. Mit der in Kapitel II diskutierten Methode erhalten wir

$$1/T_{1S} = T \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\bar{Q}(\omega+i\delta) - \bar{Q}(\omega-i\delta)}{\omega}$$

wobei

$$\bar{Q}(\omega) = -\frac{3}{4} T C \sum_{\omega_1, \omega_2} \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega) \times \\ \times \text{Sp} \{ G(r,r,\omega_1) G(r,r,\omega_2) - F^{\dagger}(r,r,\omega_1) F(r,r,\omega_2) \} \quad (8)$$

Transformation von (8) in den Fourierraum ergibt

$$\begin{aligned} \overline{Q(r,r,\omega)} = & - \frac{\pi}{T_m} \sum_{\omega_1, \omega_2} \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega) \left(\frac{\pi}{m p_0} \right)^2 \times \\ & \times \left\{ \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} G(p_1, \omega_1) G(p_2, \omega_2) \right. \\ & - \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} G(p_1, \omega_1) \Delta(q) G(p_1 + q, -\omega_1) \Delta^+(q) \times \\ & \quad \times G(p_1, \omega_1) G(p_2, \omega_2) \\ & \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} G(p_1, \omega_1) G(p_2, \omega_2) \Delta(q) G(p_2 + q, -\omega_2) \times \\ & \quad \Delta^+(q) G(p_2, \omega_2) \\ & \left. - \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} G(p_1, \omega_1) \Delta(q) G(p_1 + q, -\omega_1) G(p_1 + q, -\omega_2) \times \right. \\ & \quad \left. \times \Delta^+(q) G(p_2, \omega_2) \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

Es handelt sich hier wieder um $\ell=0$ Vertices mit großem Impulsübertrag. Wir können die Vertexkorrektur vernachlässigen und beschränken uns auf die nackten Vertices. Führen wir die entsprechende Renormierung des Δ -Vertex durch, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \overline{Q(r,r,\omega)} = & \frac{\pi}{8} \sum_{\omega_1, \omega_2} \sum_{\pm} \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega) \text{sign}(\omega_1, \omega_2) \times \quad (10) \\ & \times \left[1 + (g_{\pm}(\omega_1) + \text{sign}(\omega_1, \omega_2) g_{\pm}(\omega_2))^2 \right] \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung der Klammer mit den in Kap.II (41) angegebenen Funktionen und Summation führt nach einer längeren Rechnung auf:

$$\frac{T_{1n} - T_{1s}}{T_{1s}} = \frac{\langle |\Delta(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{1}{4\gamma t I^2} \left[\left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - I^2}}\right) \frac{1}{\rho_-} \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho_-\right) + \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - I^2}}\right) \frac{1}{\rho_+} \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho_+\right) \right. \\ \left. + 3\left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - I^2}}\right) \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \rho_-\right) + 3\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - I^2}}\right) \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \rho_+\right) \right] \\ \rho_{\pm} = \frac{1}{2\gamma t} (a \pm \sqrt{b^2 - I^2}) \quad (41)$$

Die Konstanten a, b, I haben die in Kapitel II angegebene Bedeutung.

Für Temperaturen $T \rightarrow 0$ gilt:

$$\frac{T_{1n} - T_{1s}}{T_{1s}} = - \frac{\langle |\Delta(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{(a+b)^2 - I^2}{(a^2 - b^2 + I^2)^2} \quad (42)$$

Vergleichen wir dies mit dem Ausdruck für die Zustandsdichte (III, 48) so erhalten wir:

$$T_{1n}/T_{1s} = 2 \cdot N_S(0)/N(0) - 1 \quad (43)$$

Die Relaxationszeiten verhalten sich bei tiefen Temperaturen in dem Bereich, in dem die Energielücke verschwindet, umgekehrt wie die Zustandsdichten an der Fermikante in den beiden Zuständen. Ist die Zustandsdichte bei $T = 0$ größer als im Normalzustand, dann ist die Relaxationszeit im supraleitenden kleiner als im normalleitenden Zustand. Betrachten wir nun den Temperaturbereich $T \gg T_{co} - T$ zuerst für $b \neq 0$, d.h. endliche Spinflipzeit im Fall der dünnen Schicht.

$$\frac{T_{1n} - T_{1s}}{T_{1s}} = \frac{\langle |\Delta(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{1}{2(\gamma t)^2 (1-t)} \left[\psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 \left\{ 1 - \frac{\gamma t}{2b^2 \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\psi^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right)}{\psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right)} \right\}$$

Entwickeln wir diesen Ausdruck nach Potenzen von $(1 - T/T_{co})$ so finden wir, dass die Entwicklung bei $T_c = T_{co}$ divergiert wie $(1 - T_c/T_{co})^{-1}$ in Übereinstimmung mit dem BCS-Resultat.

Bei verschwindender Spinbahnwechselwirkung erhalten wir für die dünne Schicht ein anderes Ergebnis.

$$\frac{T_{1n} - T_{1s}}{T_{1s}} = \frac{\langle |\Delta(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{1}{2(2\gamma t)^2} \left(2\gamma t c \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) + 4\psi^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) \right) \quad (15)$$

Setzen wir die numerischen Werte der Konstanten in (14) ein, so gilt:

$$\frac{T_{1n} - T_{1s}}{T_{1s}} = \frac{\langle |\Delta(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} 0.679 (t \cdot c - 3.83) / t^2 \quad (16)$$

Für Temperaturen $T \gg T_{co} - T$ kann für geeignete Parameterwerte von c die rechte Seite negativ werden. Dieses Verhalten weicht vom BCS-Supraleiter ab, da bei diesem die Kernspinrelaxationszeit im supraleitenden Zustand für Temperaturen $T \rightarrow T_{co}$ kleiner ist als im normalleitenden Zustand.

Für den Supraleiter zweiter Art erhalten wir für $b \neq 0$ und $c > 0$

$$\frac{T_{1n} - T_{1s}}{T_{1s}} = \frac{\langle |\Delta(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{1}{2(2\gamma t)^2} \frac{[\psi^{(4)}(\frac{1}{2})]^2}{(1-t)} \quad (17)$$

Führen wir den in Kapitel II angegebenen Mittelwert von $\langle |\Delta(r)|^2 \rangle$ ein und spalten die Singularität bei T_{co} ab, dann gilt für das Verhältnis der Kernspinrelaxationszeiten

$$\frac{T_{1n} - T_{1s}}{T_{1s}} = \frac{2.90}{\beta} \frac{|1 - T/T_c|}{1 - T_c/T_{co}} \frac{|k(t, c, b)|}{f_{1,1}(t, c, b)}$$

$$k(t, c, b) = \frac{1}{2.90} (1 - \frac{b}{T_c}) \left\{ \left(1 + \frac{b}{T_c^2 - T^2}\right) \frac{1}{\beta_-} \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \beta_-\right) + \left(1 - \frac{b}{T_c^2 - T^2}\right) \frac{1}{\beta_+} \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \beta_+\right) \right\}$$

$$+ \left(1 + \frac{b}{T_c^2 - T^2}\right) \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \beta_-\right) + 3 \left(1 - \frac{b}{T_c^2 - T^2}\right) \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \beta_+\right)$$

Wir diskutieren wieder die Abhängigkeit des Koeffizienten

$$C_K = \frac{1/R(t_c, c, b) \cdot h_K(t_c, c, b)}{f_{||, \perp}(t_c, c, b)}$$

von der Temperatur t_c und den Parametern c und b .

Betrachten wir zuerst den Fall der dünnen Schicht bei unendlich großer Spinflipzeit.

In Abb. 26 sind wieder die Nullstellen der Funktionen aufgetragen, die in $C_K(t_c, c, b)$ auftreten, für $b = 0$ in der t_c, c - Ebene. Es existieren jetzt zwei Nullstellenäste, von denen der eine schon früher vorkam aufgrund der größeren Zustandsdichte an der Fermikante im supraleitenden Zustand und der andere seinen Ursprung in dem Auftreten des Kohärenzfaktors hat. Bei hinreichend großem c fällt der zweite Ast mit der Geraden $t_c = 0.595$ zusammen. Für Parameterwerte $c < 2.82$ finden wir ein Verhalten, das zur BCS-Theorie genau entgegengesetzt ist. Für tiefe Temperaturen wird die Kernspinrelaxationszeit kleiner als im normalleitenden Fall und für Temperaturen nahe T_{co} ist es genau umgekehrt. Ähnlich ist im Intervall $2.82 < c < 3.83$ die Kernspinrelaxationszeit im supraleitenden kleiner als im normalleitenden Zustand für alle Temperaturen T .

In Abb. 27 ist $C_K(t_c, c, b)$ für verschiedene Werte von c gegen t_c aufgetragen für verschwindendes b . Die Singularitäten rühren von den f -Funktionen her und zeigen an, dass sich die Art des Phasenübergangs ändert. Wir finden hier das oben erwähnte von der BCS-Theorie abweichende Verhalten.

Bei einer endlichen Spinflipzeit verschwinden die oben genannten Effekte. So liegt bereits bei $b = 0.1$ der Bereich $h_K(t_c, c, b) < 0$ fast ganz in dem Gebiet der Phasenübergänge erster Ordnung und der zweite Nullstellenast nähert sich der Asymptote $t_c = 0.595$.

In Abb. 29 sind die beiden Nullstellenäste für verschiedene Werte von b in der t_c, c - Ebene aufgetragen.

Abb. 28 zeigt die Funktion $C_K(t_c, c, b)$ für $b=0.5$

Wir finden wieder die charakteristischen Pole, die von den Phasenübergängen erster Ordnung herrühren.

Für $c \rightarrow \infty$ wird $C_K(t_c, c, b)$ wieder von b unabhängig und es gilt

$$\lim_{c \rightarrow \infty} C_K(t_c, c, b) = C_K(t_c)$$

Im Grenzfall $b \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\lim_{b \rightarrow \infty} C_K(t_c, c, b) = C_K(t_c)$$

Im Fall des Supraleiters zweiter Art liegt der linke Nullstellenast für alle Werte von b wie früher im Gebiet der Phasenübergänge erster Ordnung (Abb. 30). Der zweite Ast zeigt ein ähnliches Verhalten wie im Fall der dünnen Schicht. Abb. 31 zeigt den Koeffizienten C_K als Funktion von t_c für mehrere Werte von c und $b = 0.5$.

Im Grenzfall $b \rightarrow \infty$ verläuft $C_K(t_c, c, b)$ innerhalb der in Abb. 32 eingezeichneten Grenzkurven.

e) Ultraschalldämpfung

Im Gegensatz zur Kernspinrelaxation führt der Kohärenz-
faktor bei der Dämpfung von Schallwellen in Supraleitern
zu einem rapiden Abfall des Absorptionskoeffizienten
unterhalb der kritischen Temperatur. Nach der BCS-Theorie
ist das Verhältnis der Absorptionskoeffizienten α_s/α_n
im normal- und supraleitenden Zustand für Schallwellen
geringer Frequenz $\hbar\omega \ll 2\Delta_0$ im longitudinalen Fall von
der Gestalt

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_n} = \frac{2}{1 + e^{2\Delta(T)/T}} \quad (1)$$

Ähnlich wie bei der Kernspinrelaxation wird die Ableitung
dieses Ausdrucks nach der Temperatur für $T \rightarrow T_c$ unendlich.
Den Einfluss von nichtmagnetischen Verunreinigungen ohne
Feld auf den Absorptionskoeffizienten hat Tsuneto³⁴
untersucht und findet, dass die Dämpfung nahezu unabhängig
von der freien Weglänge ist.

Kadanoff und Falko³⁵ behandeln die Dämpfung von Schall-
wellen in einem Supraleiter mit magnetischen Verun-
reinigungen und leiten eine Formel für den Absorptions-
koeffizienten ab. Sie gehen dabei aus von einer Beziehung
zwischen der periodischen Verschiebung der Ionen, die
durch die Schallwelle erzeugt wird und der Bewegung der
Elektronen im zeitlichen veränderlichen Feld der Ionen,
Nach Transformation in das mit den Ionen bewegte Koordinaten-
system gelangen sie zu einer Dispersionsbeziehung für
Schallwellen im longitudinalen Fall. Sie berücksichtigen
weiter noch die Coulombwechselwirkung der Elektronen in
der RPA-Näherung und erhalten schließlich für den Absorp-
tionskoeffizienten im longitudinalen Fall bei kleinen
Frequenzen

$$\alpha(q, \omega) = \text{Re} \frac{q^2}{i\omega \rho_{ion} v_s} \left\{ \langle \tau_{zz} \tau_{zz} \rangle - \frac{(\langle \tau_{zz} n \rangle)^2}{\langle nn \rangle} \right\} \quad (2)$$

Hierbei ist

$$n(r,t) = \psi^\dagger(r',t) \psi(r,t) \Big|_{r' \rightarrow r}$$

der Elektronendichteoperator und

$$\tau_{zz}(r,t) = - \frac{1}{4m^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z'} \right)^2 n(r,t)$$

Für kleine Werte des Ordnungsparameters Δ haben McLean und Houghton²² den longitudinalen und Maki³⁶ den transversalen Absorptionskoeffizienten berechnet.

Wir diskutieren den Einfluss des Pauli-Terms und einer endlichen Spinflipzeit auf den longitudinalen Absorptionskoeffizienten. Liegt ein Phasenübergang zweiter Ordnung vor, dann können wir den normalleitenden Anteil des Absorptionskoeffizienten abspalten.

$$\alpha = \alpha_n + \alpha_s$$

$$\alpha_n = \text{Re} \left\{ \frac{q^2}{i\omega_{\text{phon}} v_s} \left[\langle \tau_{zz} \tau_{zz} \rangle_n - \frac{(\langle \tau_{zz} n \rangle)^2}{\langle n n \rangle} \right] \right\}$$

$$\alpha_s = \text{Re} \left\{ \frac{q^2}{i\omega_{\text{phon}} v_s} \left[\langle \tau_{zz} \tau_{zz} \rangle_s - \frac{(\langle \tau_{zz} n \rangle)^2}{\langle n n \rangle} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(2 \langle \tau_{zz} n \rangle_s - \frac{\langle \tau_{zz} n \rangle_n \langle n n \rangle_s}{\langle n n \rangle_n} \right) \right] \right\} \quad (3)$$

Die mit n indizierten Größen beziehen sich auf den normalleitenden Zustand, während die Indizierung mit s die Änderung dieser Größen im supraleitenden Zustand angibt. Die normal-

leitenden Beiträge sind von Kadanoff und Falko³⁶ und Houghton und McLean berechnet worden unter der Annahme $v_s = \omega/|q| \ll v_F$

Die im Zusammenhang mit den Operatoren τ_{zz} und n auftretenden Vertexfunktionen sind für $\omega \ll v_F |q|$ nach Kapitel III wie folgt zu renormieren.

$$\tilde{V}_n = (1 - Y^{-1} \arctg Y)^{-1}$$

$$\tilde{V}_{\tau_{zz}} = \frac{p_0^2}{m} (\cos^2 \theta + Y^{-2})$$

Bei der Berechnung der in (4) auftretenden Beiträge im supraleitenden Zustand nehmen wir weiter an, dass die freie Weglänge ℓ_{s0} , die der Spinflipzeit entspricht, viel größer ist als die Wellenlänge der Schallwellen. Der Unterschied zu den Rechnungen von Houghton und McLean besteht dann nur in der verschiedenen Renormierung des Δ -Vertex. Die in (4) auftretenden Beiträge im supraleitenden Zustand berechnen wir mit Hilfe der Formel (41) Kapitel III, indem wir die dazugehörigen Vertexfunktionen V_n bzw. $V_{\tau_{zz}}$ einsetzen. Die Summation über die Frequenzen ergibt, dass die Terme mit Λ_1 keinen Beitrag liefern und der Term mit Λ_2 zu dem Faktor führt, in dem Ableitungen der Digammafunktion stehen. Für das Verhältnis der Absorptionskoeffizienten im normal- und supraleitenden Zustand ergibt sich nach Mittelung über die Probe:

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_n} = 1 - \frac{\langle |\Delta(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{1}{2(2\pi)^2} \left\{ \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1^2}}\right) \frac{1}{\rho_-} \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho_-\right) + \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1^2}}\right) \frac{1}{\rho_+} \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho_+\right) \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1^2}}\right) \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \rho_-\right) - \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1^2}}\right) \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \rho_+\right) \right\} \quad (5)$$

Für Temperaturen $T \ll T_{co}$ gilt:

$$1 - \frac{\alpha_s}{\alpha_n} = \frac{\langle |A(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{(a+b)^2 I^2}{(a^2 - b^2 + I^2)^2} \quad (6)$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit der Zustandsdichte an der Fermikante, dann finden wir für das Verhältnis der Absorptionskoeffizienten in den beiden Zuständen

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_n} = 2 \cdot \frac{N_s(0)}{N(0)} - 1 \quad (7)$$

Wie bereits früher erwähnt, kann die Zustandsdichte im supraleitenden Zustand an der Fermikante größer werden als im normalleitenden Zustand. Das gleiche gilt dann auch für den Absorptionskoeffizienten.

Für Temperaturen nahe T_{co} kann die Änderung des Absorptionskoeffizienten mit der Temperatur unendlich werden.

Für die dünne Schicht folgt in diesem Temperaturbereich mit Hilfe von II (10) im Grenzfall $\tau_{s0} \rightarrow \infty$

$$1 - \frac{\alpha_s}{\alpha_n} = \frac{\langle |A(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{1}{2(2\gamma t)^2} C \cdot \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (8)$$

Die Singularität bei $T = T_{co}$ tritt hier nicht auf und die Änderung des Absorptionskoeffizienten bei Übergang zum supraleitenden Zustand bleibt endlich.

Dagegen gilt für den Absorptionskoeffizienten des Supraleiters zweiter Art im Grenzfall $\tau_{s0} \rightarrow \infty$ und für $T \gg T_{co} - T$

$$1 - \frac{\alpha_s}{\alpha_n} = \frac{\langle |A(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{1}{2(2\gamma t)^2} \frac{C^2}{1+C^2} \frac{[\psi^{(1)}(\frac{1}{2})]^2}{1-t} \quad (9)$$

Im Fall einer endlichen Spinflipzeit τ_{s0} erhalten wir für die dünne Schicht:

$$1 - \frac{\alpha_s}{\alpha_n} = \frac{\langle |\Delta(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{1}{2(2\gamma t)^2(1-t)} [\psi^{(1)}(\frac{1}{2})]^2 \left(1 - \frac{\gamma t}{2\epsilon^2 \psi^{(1)}(\frac{1}{2})} \frac{\psi(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{\gamma}) - \psi(\frac{1}{2})}{c + \gamma/2b} \right) \quad (10)$$

Diese Näherung gilt auch im Grenzfall $c = 0$ für den Supraleiter zweiter Art, während für $c \neq 0$ und $b \neq 0$ der Absorptionskoeffizient in demselben Material folgender Relation für $T \gg T_{co} - T$ genügt:

$$1 - \frac{\alpha_s}{\alpha_n} = \frac{\langle |\Delta(r)|^2 \rangle}{\Delta_0^2} \frac{1}{2(2\gamma t)^2} \frac{[\psi^{(1)}(\frac{1}{2})]^2}{1-t} \quad (11)$$

Führen wir den Mittelwert von $\langle |\Delta(r)|^2 \rangle$ gemäss Kapitel II ein und spalten die Singularität in (5) ab, dann ergibt sich:

$$1 - \frac{\alpha_s}{\alpha_n} = \frac{2.90}{\beta} \frac{|1 - T/T_c|}{1 - T_c/T_{co}} \frac{|k(t_c, c, b)|}{f_{L||}(t_c, c, b)} \frac{h_u(t_c, c, b)}{f_{L||}(t_c, c, b)}$$

$$h_u(t_c, c, b) = \frac{1}{2.90} (1 - T_c/T_{co}) \left[\left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - T^2}}\right) \frac{1}{\beta_-} \psi^{(1)}(\frac{1}{2} + \beta_-) + \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - T^2}}\right) \frac{1}{\beta_+} \psi^{(1)}(\frac{1}{2} + \beta_+) \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - T^2}}\right) \psi^{(2)}(\frac{1}{2} + \beta_-) - \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - T^2}}\right) \psi^{(2)}(\frac{1}{2} + \beta_+) \right] \quad (12)$$

Wir diskutieren wieder den Koeffizienten

$$C_u(t_c, c, b) = \frac{|k(t_c, c, b)|}{f_{L||}(t_c, c, b)} \frac{h_u(t_c, c, b)}{f_{L||}(t_c, c, b)} \quad (13)$$

als Funktion der Temperatur und der materialabhängigen Parameter c und b .

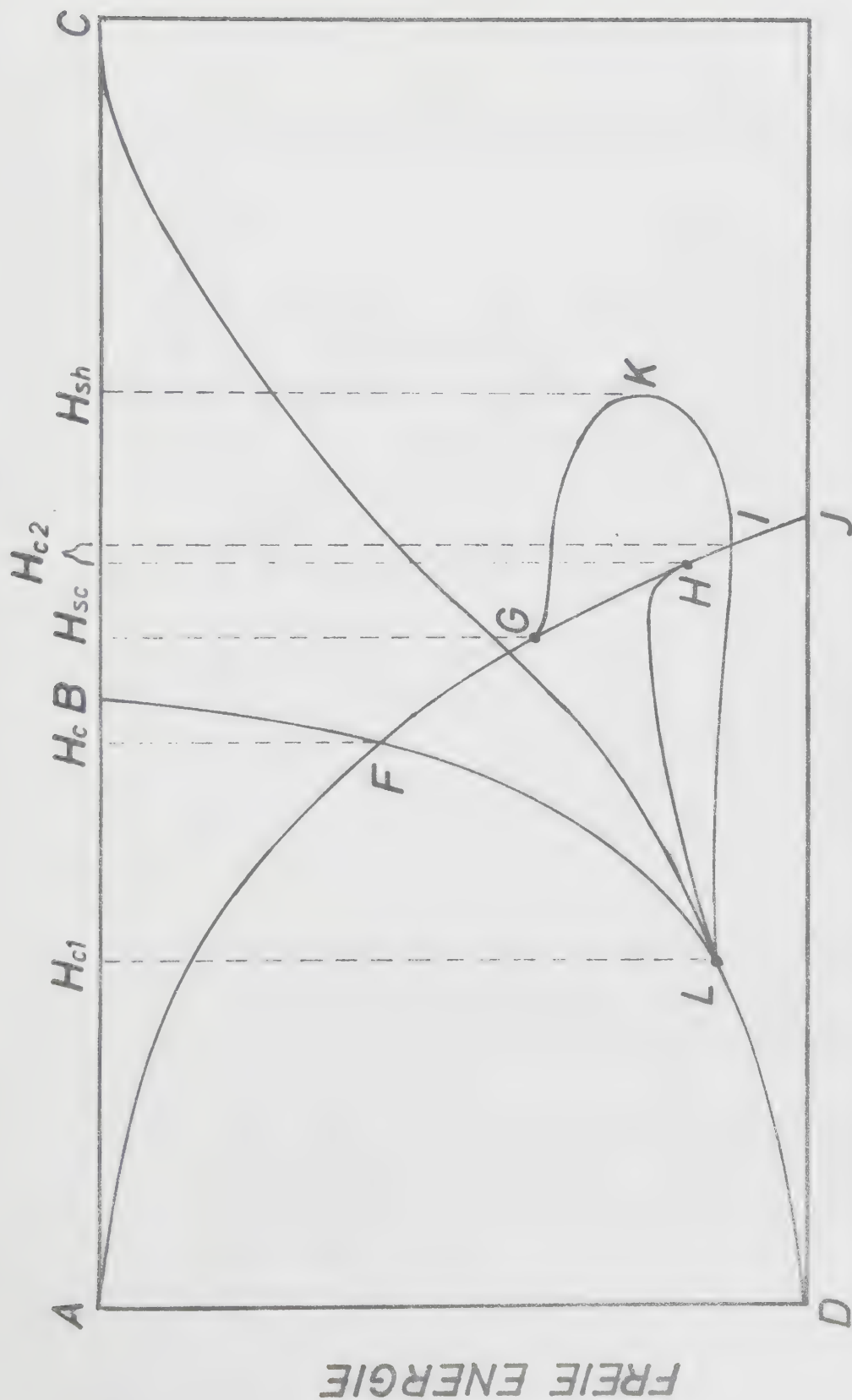
Wir betrachten zuerst den Fall der dünnen Schicht bei unendlich grosser Spinflipzeit τ_{so} . Die Nullstellen der in (14) auftretenden Funktionen sind in Abb. 33 wiedergegeben. In dem Bereich mit $f_{L||}(t_c, c, b) > 0$ und $h_u(t_c, c, b) < 0$ ist die Ultraschallabsorption im supraleitenden Zustand grösser als im normalleitenden. Im Unterschied zu den früher besprochenen Lffekten erstreckt sich die Anomalie über ein grösseres Temperaturintervall. Der Koeffizient $C_u(t_c, c, b)$ ist in Abb. 34 als Funktion der Temperatur aufgetragen für $b=0$. Im Gegensatz zu früher liegen die Bereiche mit $h_u \leq 0$ erst für $b = 0.3$ vollständig im Gebiet der Phasenübergänge erster Ordnung (Abb. 36).

In Abb. 35 ist der Verlauf der Funktion $C_u(t_c, c, b)$ aufgetragen für mehrere Werte von c und einer endlichen Spinflipzeit. Mit wachsendem c wird $C_u(t_c, c, b)$ von b unabhängig und es gilt :

$$\lim_{c \rightarrow \infty} C_u(t_c, c, b) = \lim_{b \rightarrow \infty} C_u(t_c, c, b) = C_u(t_c)$$

Im Fall des Supraleiters zweiter Art trifft jetzt auch der Fall ein, dass die Bereiche mit $\kappa_u(t_c, c, b) < 0$ nicht mehr wie früher ganz in das Gebiet der Phasenübergänge erster Ordnung fallen (Abb. 37). Für $b < 0.3$ kann der Fall eintreten, dass die Ultraschallabsorption im supraleitenden Zustand größer ist, als im normalleitenden Zustand.

In Abb. 38 ist der Koeffizient $C_u(t_c, c, b)$ für $b = 0.5$ und mehrere Werte von c als Funktion von t_c aufgetragen. Im Grenzfall $b \rightarrow \infty$ verläuft die Funktion $C_u(t_c, c, b)$ innerhalb der in Abbildung 39 angegebenen Grenzkurven.



MAGNETFELD

Abb. 1 Freie Energie als Funktion des Magnetfeldes
mit Berücksichtigung des Pauli-Term

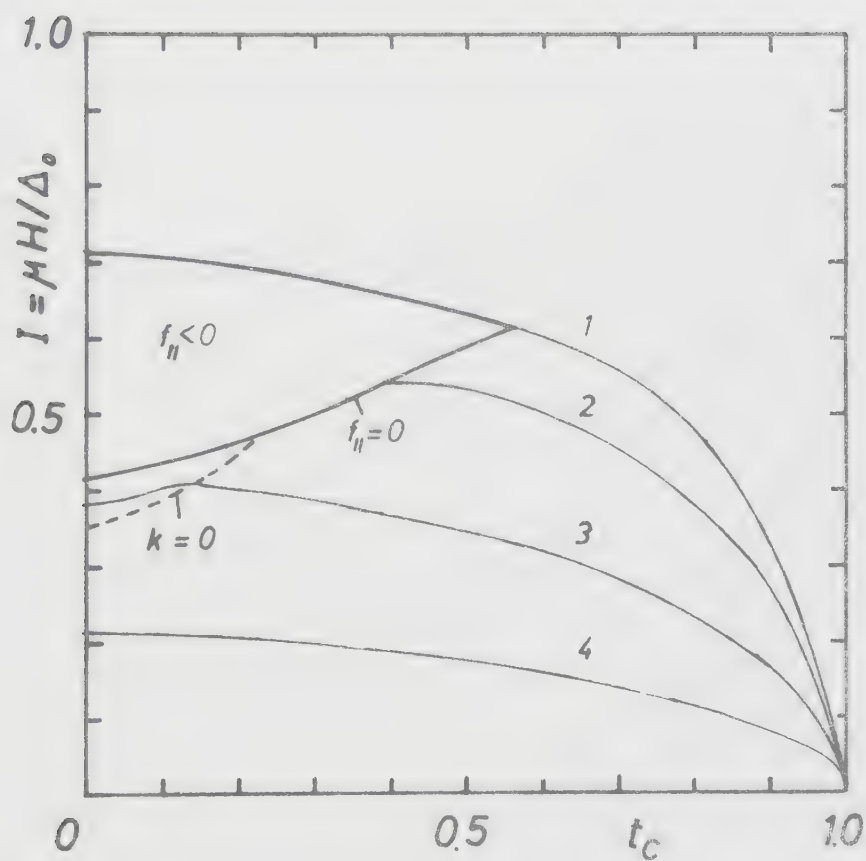


Abb. 2 Magnetfeld als Funktion der kritischen Temperatur für die dünne Schicht mit parallel zur Oberfläche angelegtem Magnetfeld und $b=0$.

Im Gebiet mit $f_{||} < 0$ liegen Phasenübergänge erster Ordnung vor. Die Kurven 1...4 entsprechen den Parameterwerten $c=0, 0.4, 2.0, 10.0$.

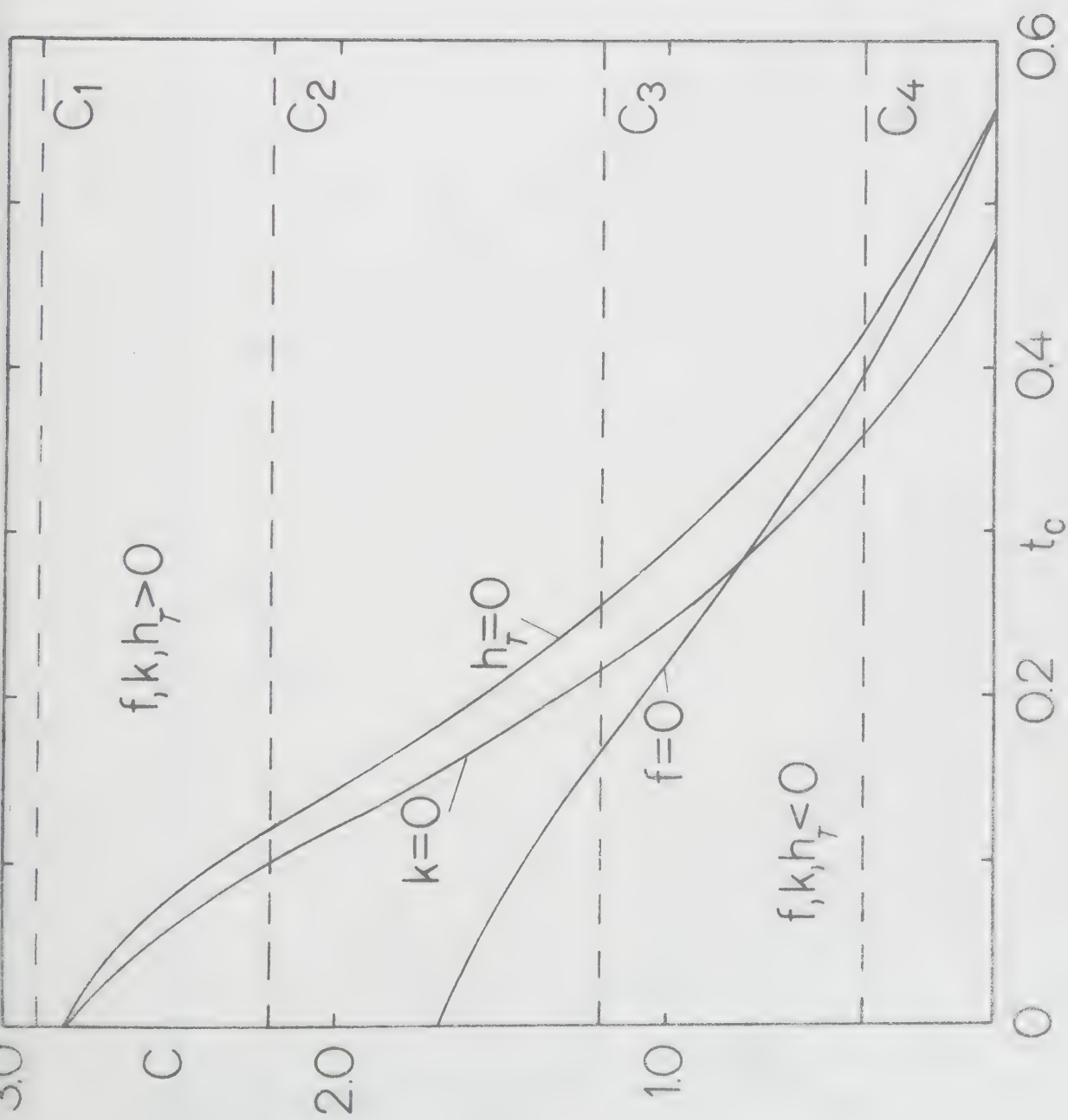


Abb. 3 Linien $f, k, h_T=0$ für $b=0$
 Dünne Schicht mit parallel zur Ober-
 fläche angelegtem Magnetfeld.

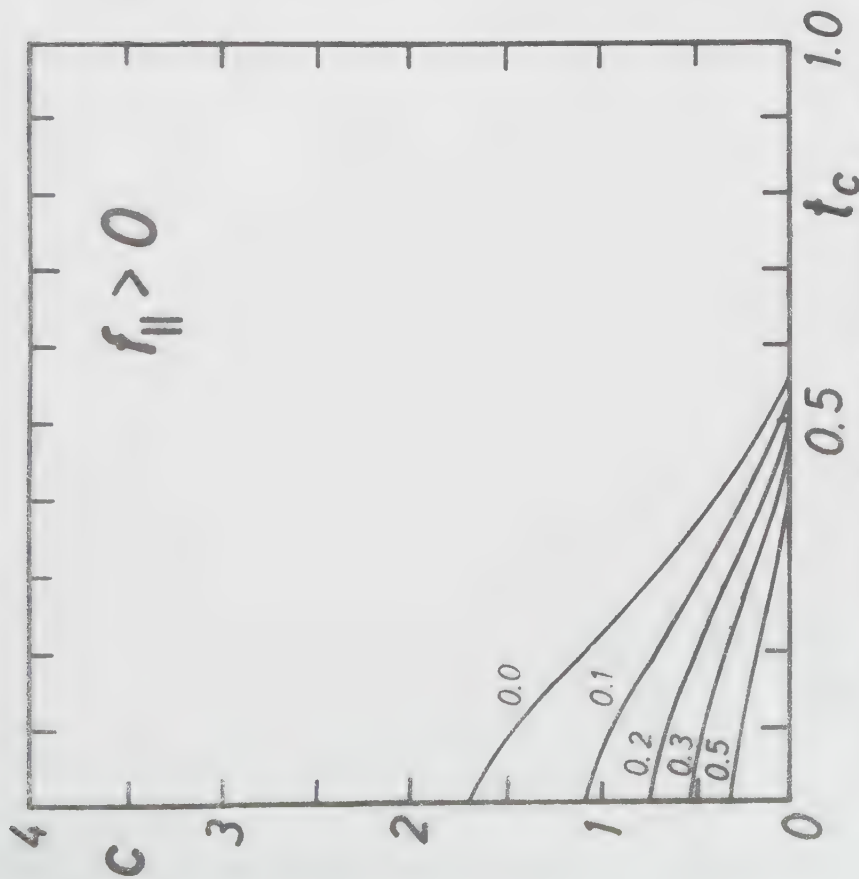


Abb. 4 Linien $f_{||} = 0$ für verschiedene Werte von b (dünne Schicht).

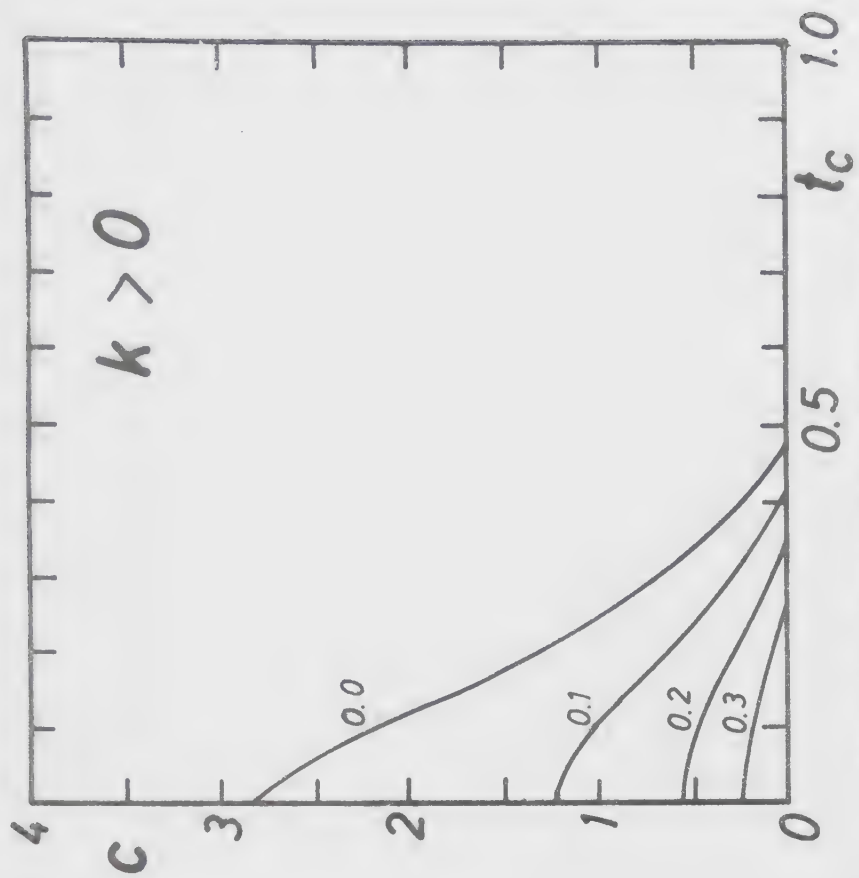


Abb. 5 Linien $k = 0$ für verschiedene Werte von b (dünne Schicht).

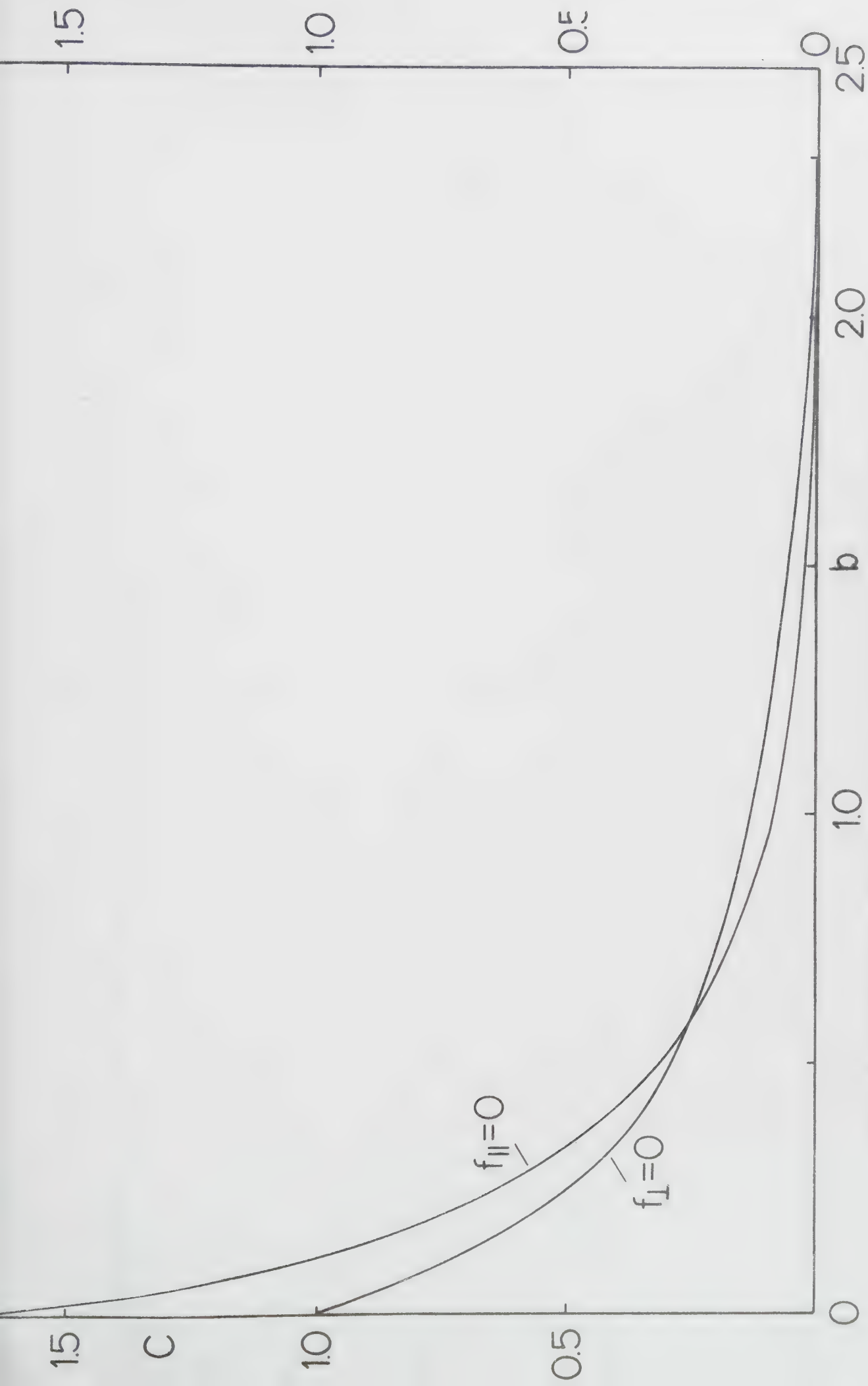


Abb. 5 Maximale Werte von c , für die noch ein Phasenübergang erster Ordnung bei $T = 0$ vorliegt.

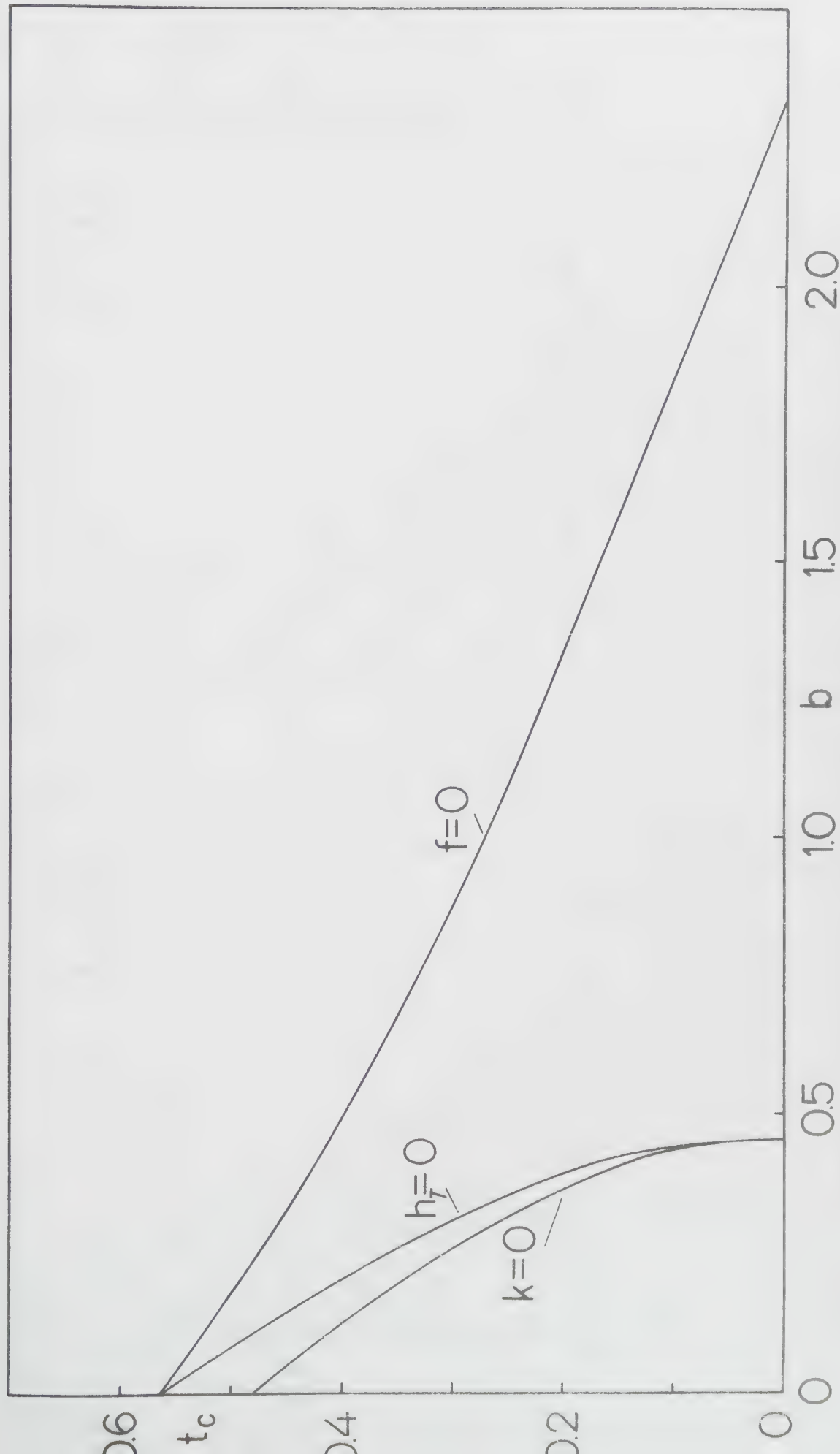


Abb. 7 Maximale Temperaturen für die noch bei $c=0$ ein Phasenübergang erster

Ordnung vorliegt. Das Diagramm gilt für beide Fälle: dünne Schicht und Typ II SL

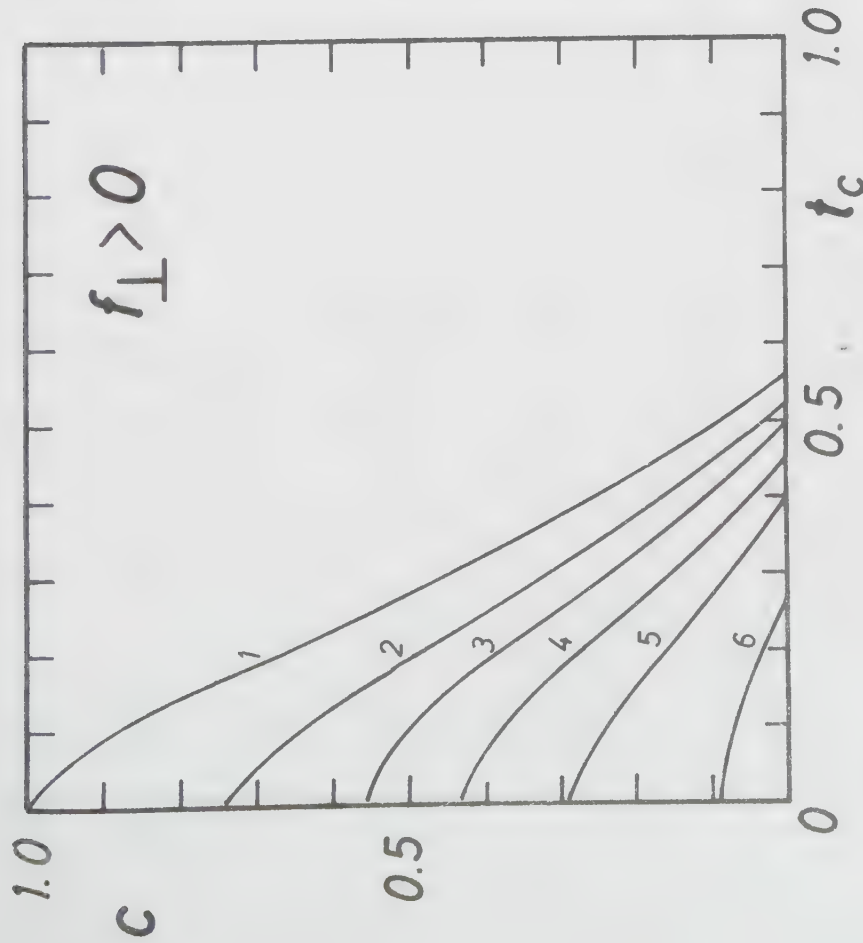


Abb. 8 Linien $f_{\perp} = 0$ für verschiedene Werte von b . Die Kurven 1...6 entsprechen $b=0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 1.0$.

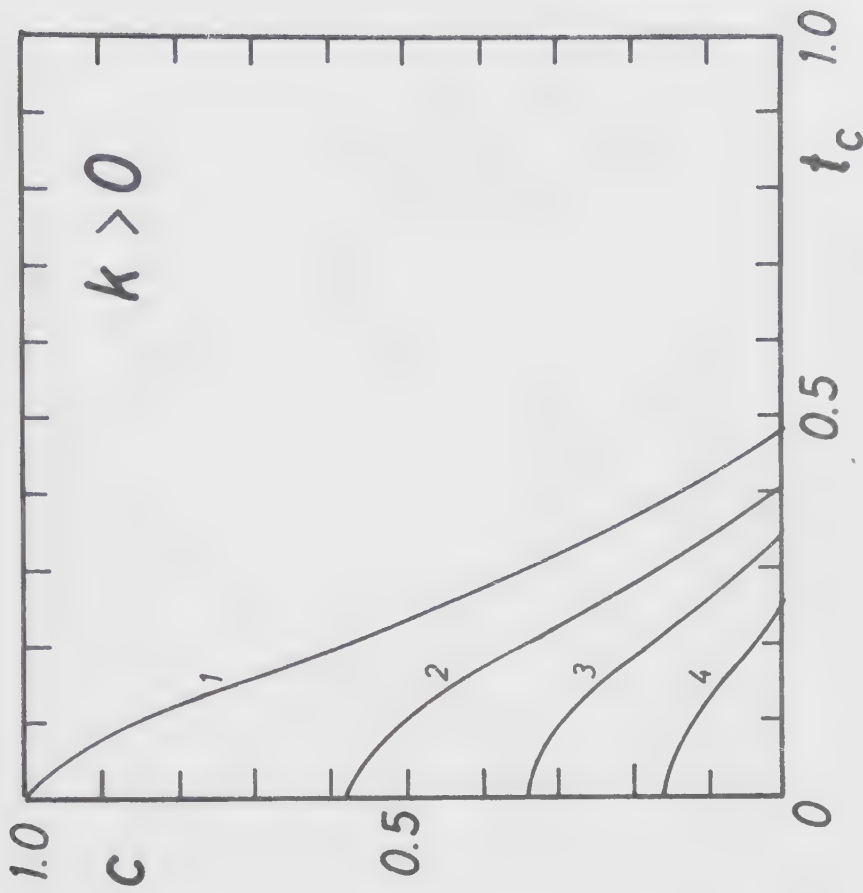


Abb. 9 Linien $k=0$ für verschiedene Werte von b . Die Kurven 1...4 entsprechen $b=0, 0.1, 0.2, 0.3$.

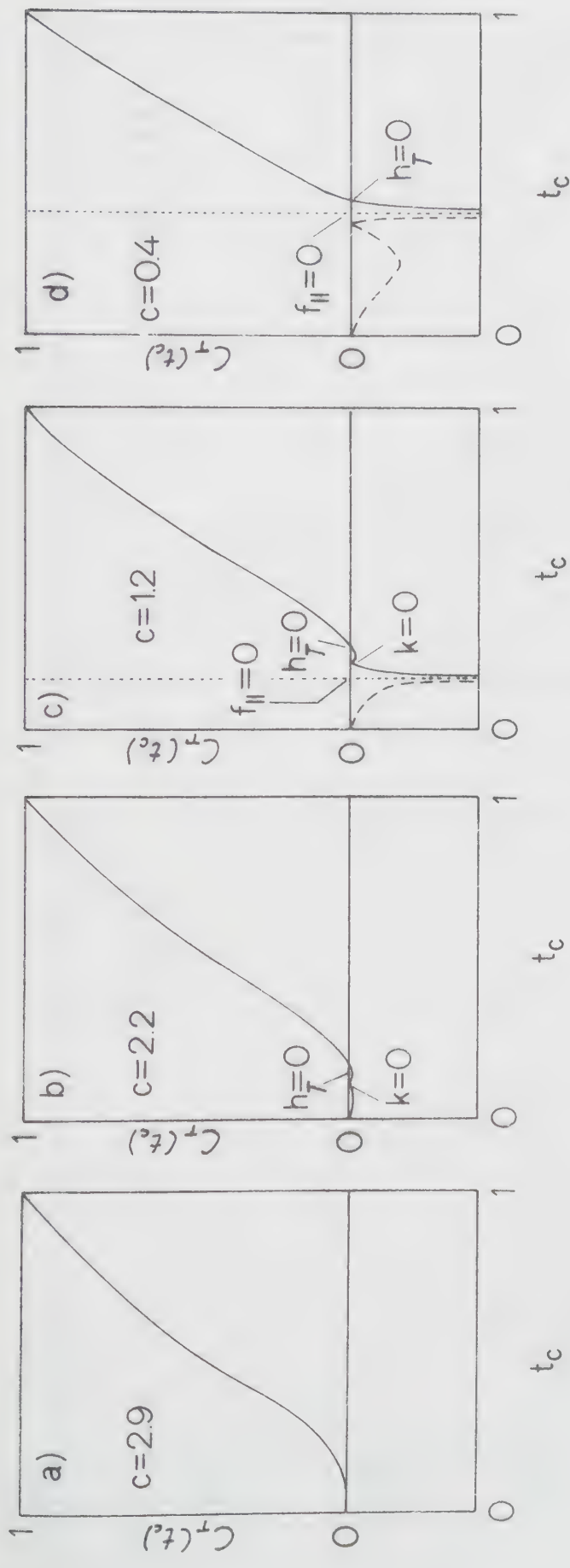


Abb. 10 Koeffizient der Tunnelierfähigkeit bei $V=0$ für $b=0$ und verschiedene Werte von c .

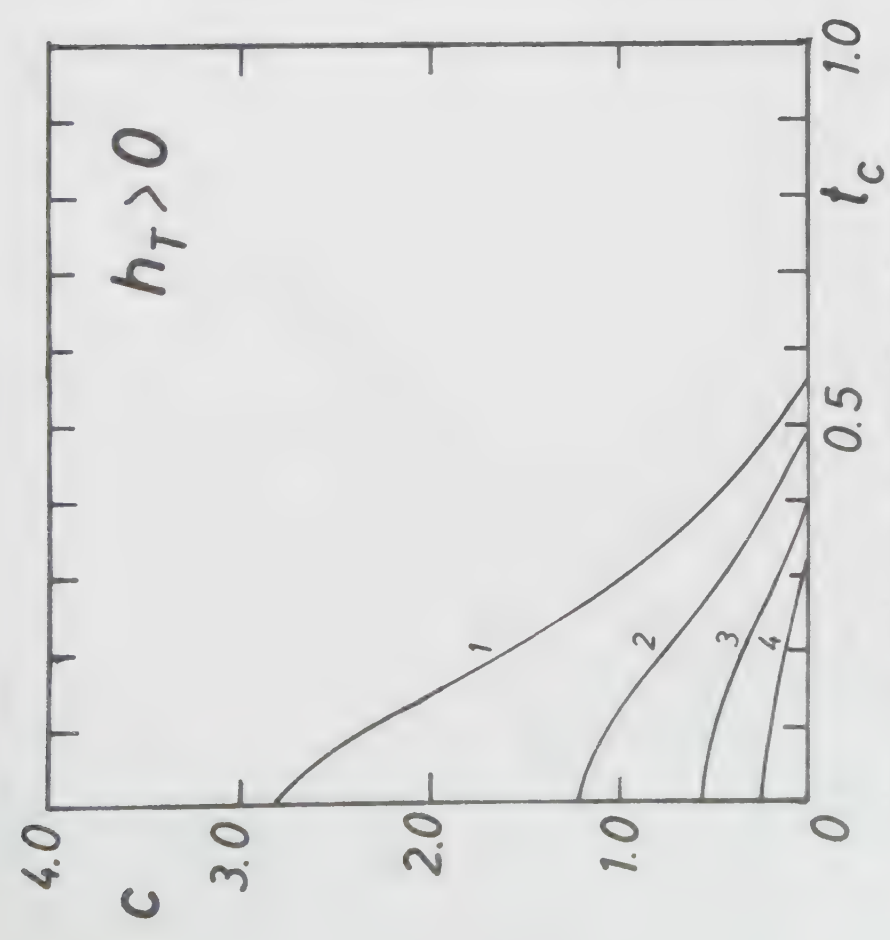


Abb. 11 Linien $h_T=0$ für verschiedene Werte von b . Die Kurven 1...4 entsprechen $b=0, 0.1, 0.2, 0.3$ (dünne Schicht).

In den Punkten mit $h_T < 0$ ist die Tunnelleitfähigkeit bei $V=0$ im supraleitenden kleiner als im normalleitenden Zustand, wenn gleichzeitig $f > 0$.

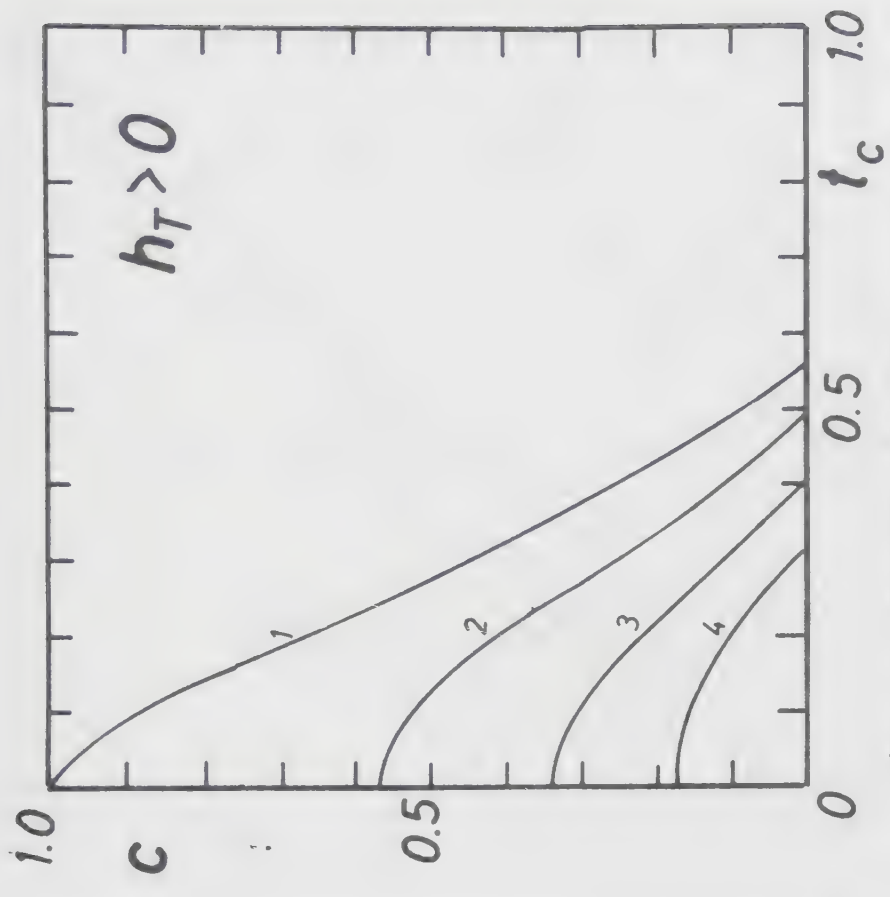


Abb. 12 Linien $h_T=0$ für verschiedene Werte von b . Die Kurven 1...4 entsprechen $b=0, 0.1, 0.2, 0.3$ (Typ II SL)

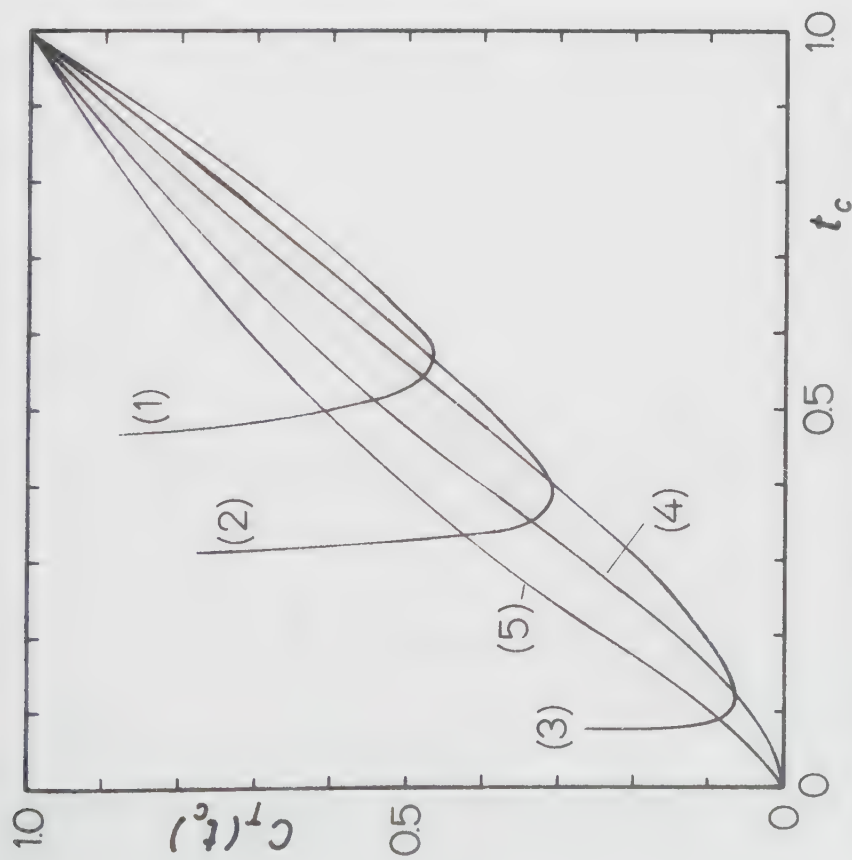


Abb. 13 Koeffizient der Tunnelleitfähigkeit bei $V=0$ für $b=0.3$ und verschiedene Werte von c . Die Kurven 1...5 entsprechen $c=0, 0.2, 0.5, 2.0, \infty$ (dünne Schicht)

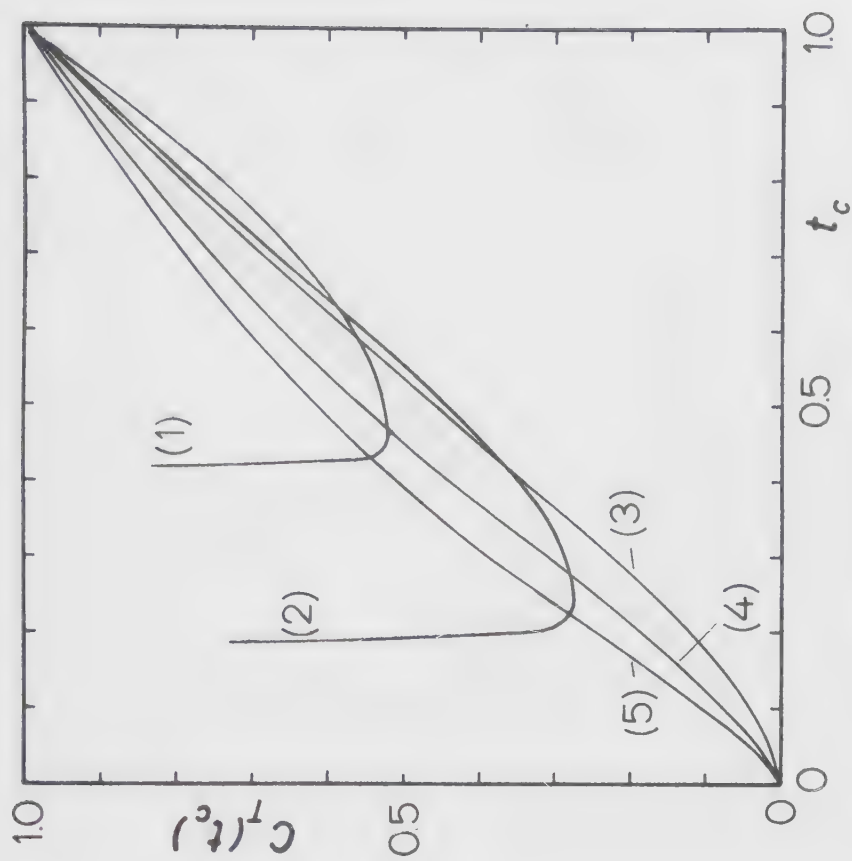


Abb. 14 Koeffizient der Tunnelleitfähigkeit bei $V=0$ für $b=0.5$ und verschiedene Werte von c . Die Kurven 1...5 entsprechen $c=0, 0.2, 0.4, 2.2, \infty$ (dünne Schicht)

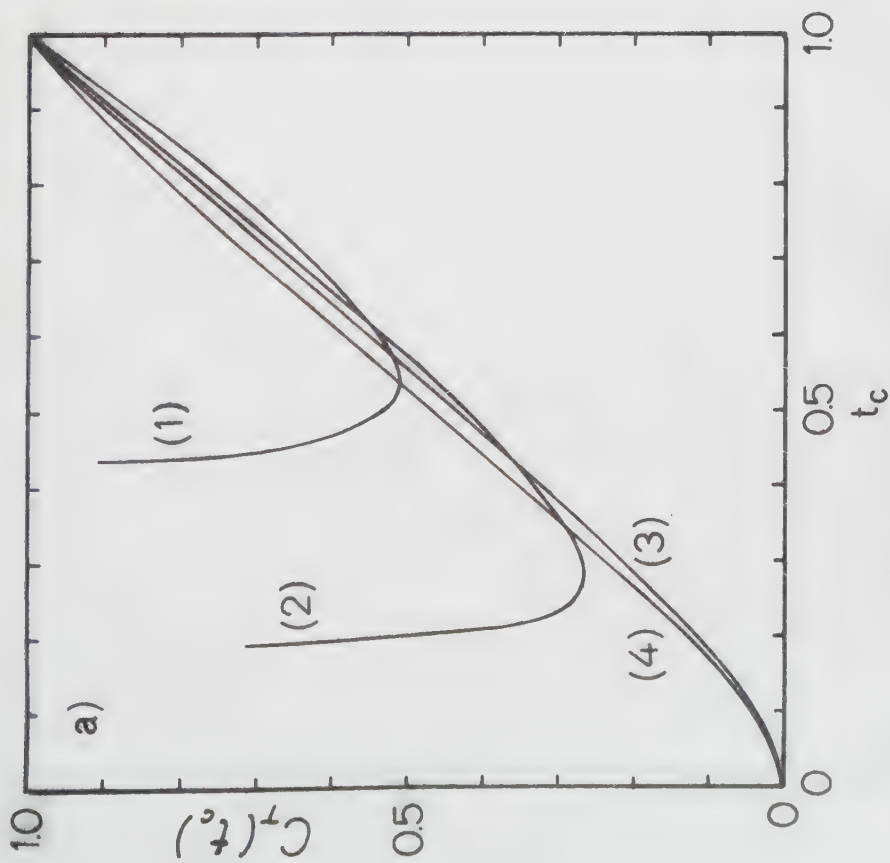


Abb. 15 Koeffizient der Tunnelleitfähigkeit bei $V=0$ für $b=0.5$ und verschiedene Werte von c . Die Kurven 1...4 entsprechen $c=0, 0.2, 0.5, \infty$ (Typ II SL)

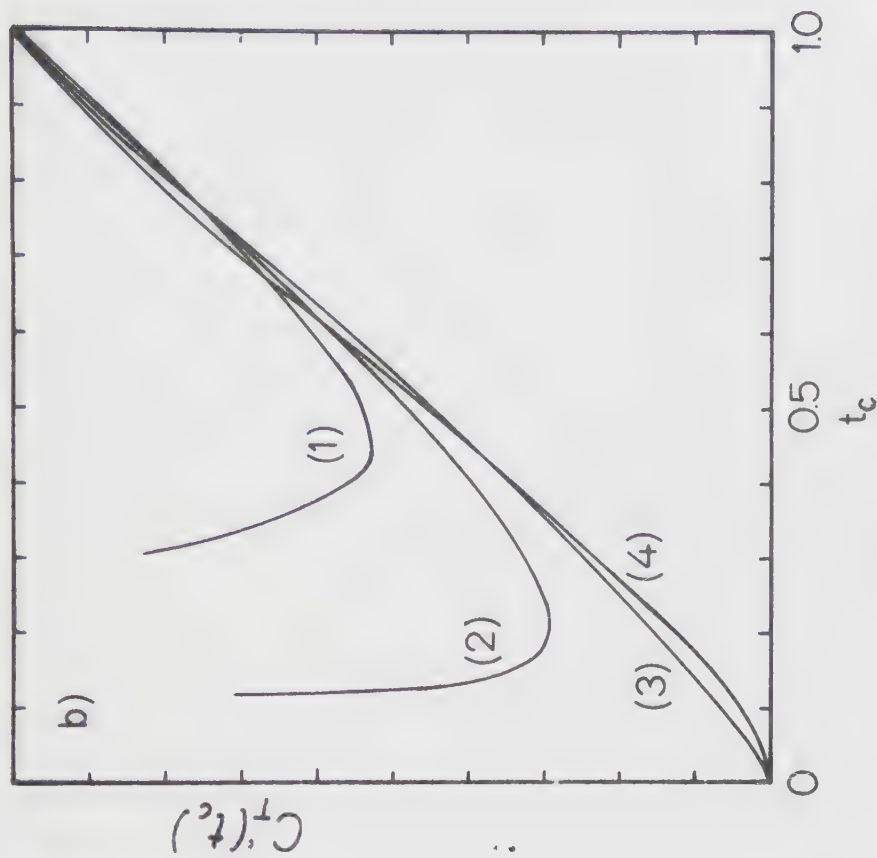


Abb. 16 Koeffizient der Tunnelleitfähigkeit bei $V=0$ für $b=0.5$ und verschiedene Werte von c . Die Kurven 1...4 entsprechen $c=0, 0.1, 0.2, \infty$ (Typ II SL)

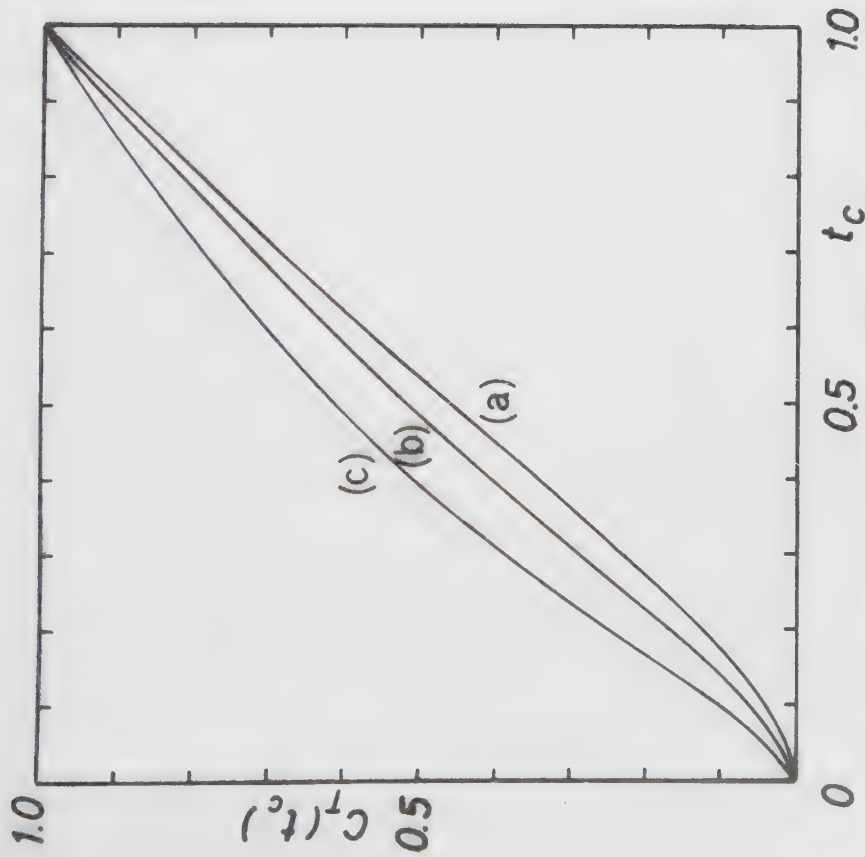


Abb. 17 Koeffizient der Tunnelleitfähigkeit bei $V=0$ für $b \rightarrow \infty$ und

- a) $\beta^2 \rightarrow 0$
- b) $\beta^2 = 10$
- c) $\beta^2 \rightarrow \infty$

(Typ II SL)

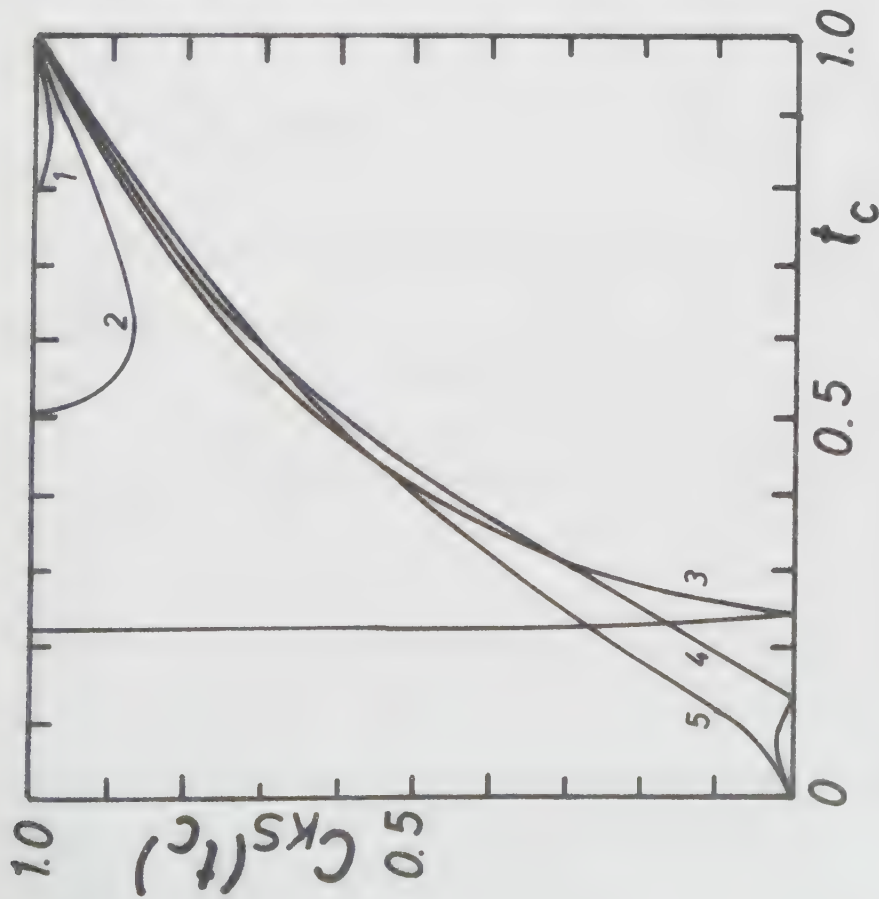


Abb. 18 Koeffizient des Knight-Shifts
für $b=0$ und verschiedene Werte
von c . Die Kurven 1...5 ent-
sprechen $c=0.0, 0.3, 1.0, 2.0,$
 ∞ (dünne Schicht)

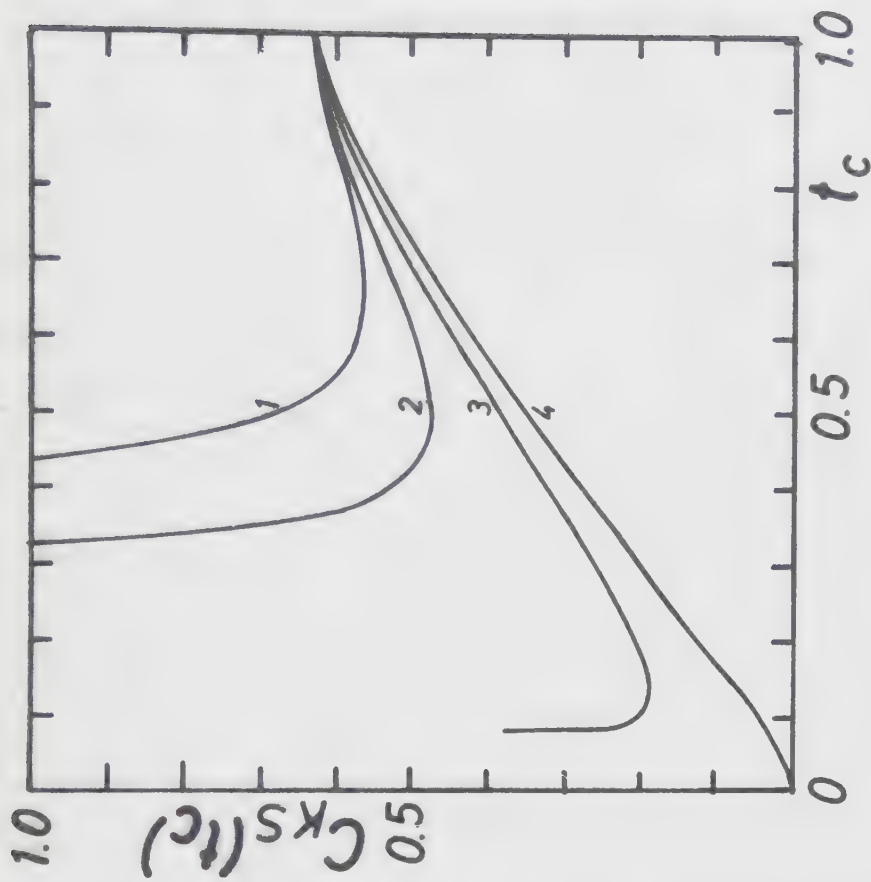


Abb. 19 Koeffizient des Knight-Shifts
für $b=0.5$ und verschiedene Werte
von c . Die Kurven 1...4 ent-
sprechen $c=0, 0.1, 0.3, \infty$
(dünne Schicht)

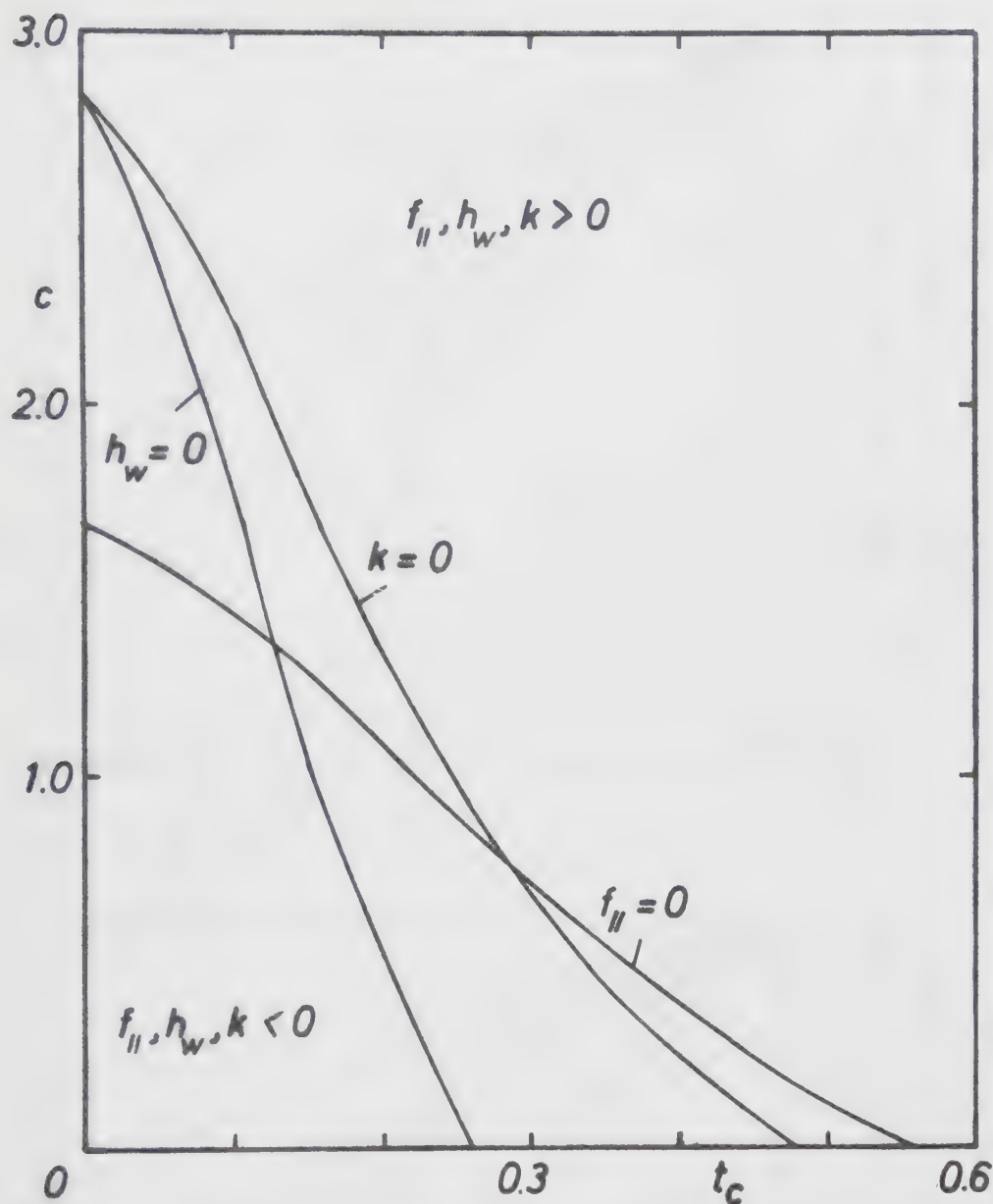


Abb. 2o Linien $f_{||}$, h_w , $k=0$ für $b=0$ (dünne Schicht)
 Für alle Punkte mit $h_w < 0$ und $f_{||} > 0$ ist
 die Wärmeleitfähigkeit im supraleitenden
 größer als im normalleitenden Zustand.

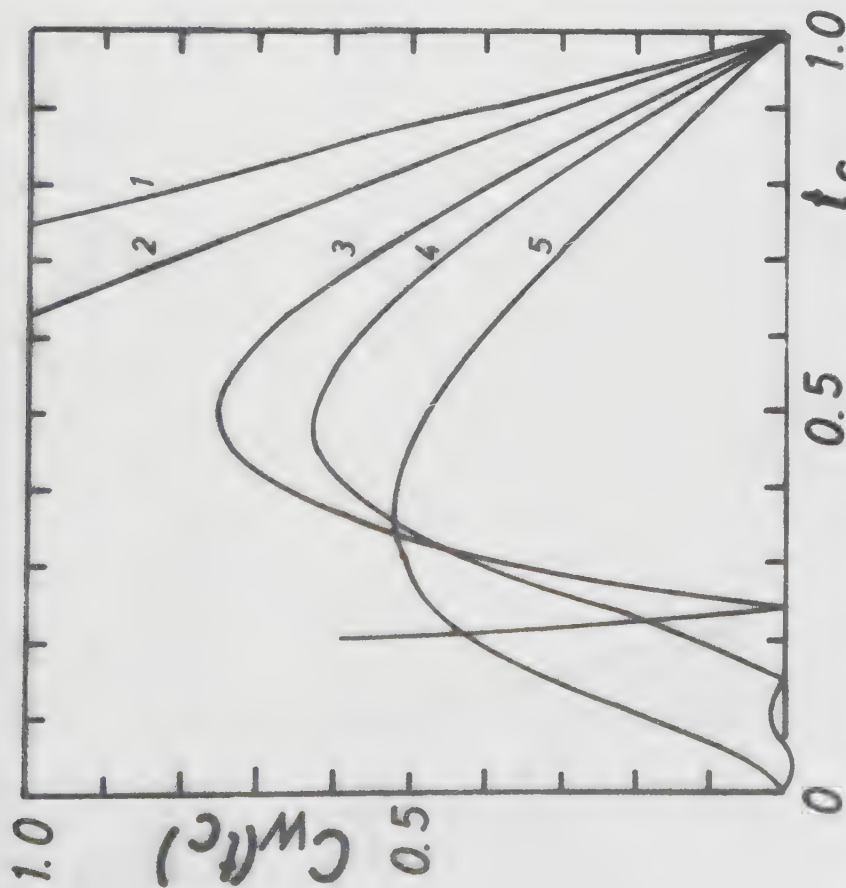


Abb. 21 a) Koeffizient der Wärmeleitfähigkeit für $b=0$ und verschiedene Werte von c . Die Kurven 1...5 entsprechen $c=0, 0.1, 0.3, 1.0, 2.0, \infty$ (dünne Schicht)

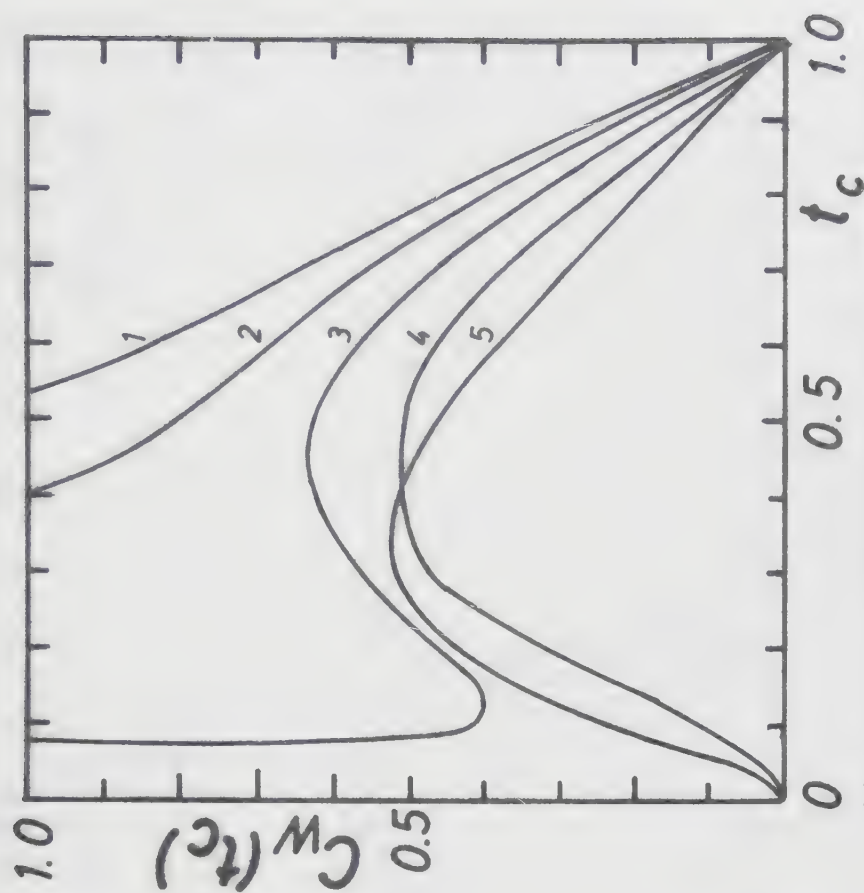


Abb. 21 b) Koeffizient der Wärmeleitfähigkeit für $b=0.3$ und verschiedene Werte von c . Die Kurven 1...5 entsprechen $c=0, 0.1, 0.3, 1.0, \infty$ (dünne Schicht)

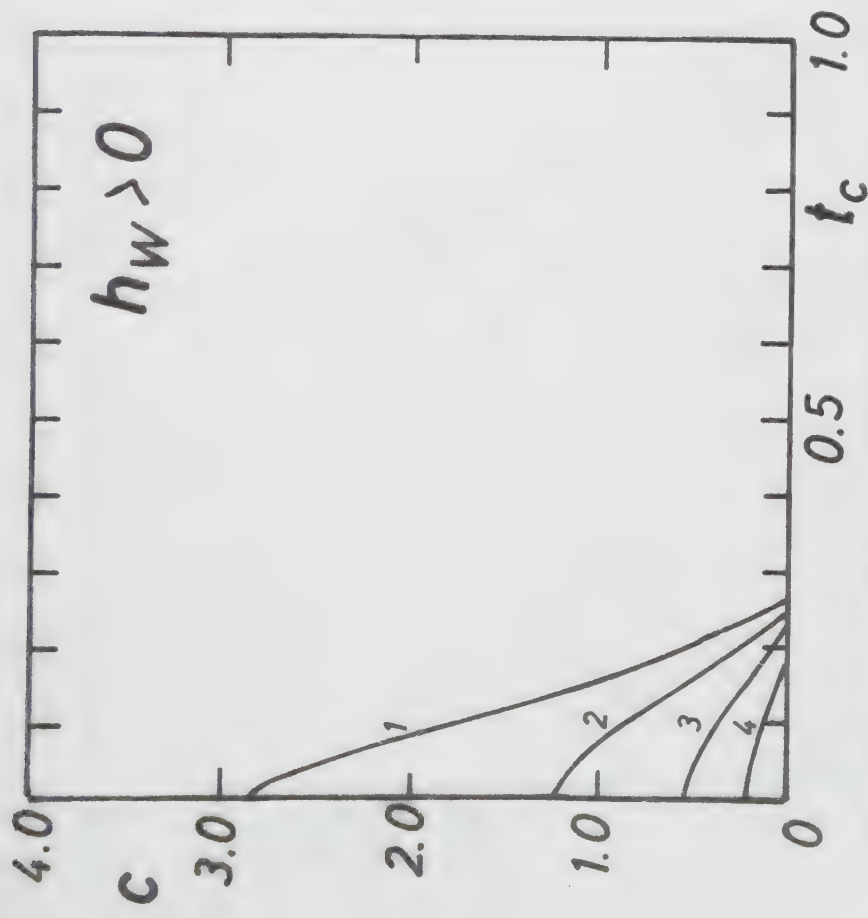


Abb. 22 Linien h_w für $b=0$, 0.1 , 0.2 , 0.3 (dünne Schicht). Für $b < 0.1$ gibt es Punkte mit $h_w < 0$ und $f > 0$, in denen die Wärmeleitfähigkeit im supraleitenden Zustand größer ist als im normalleitenden.

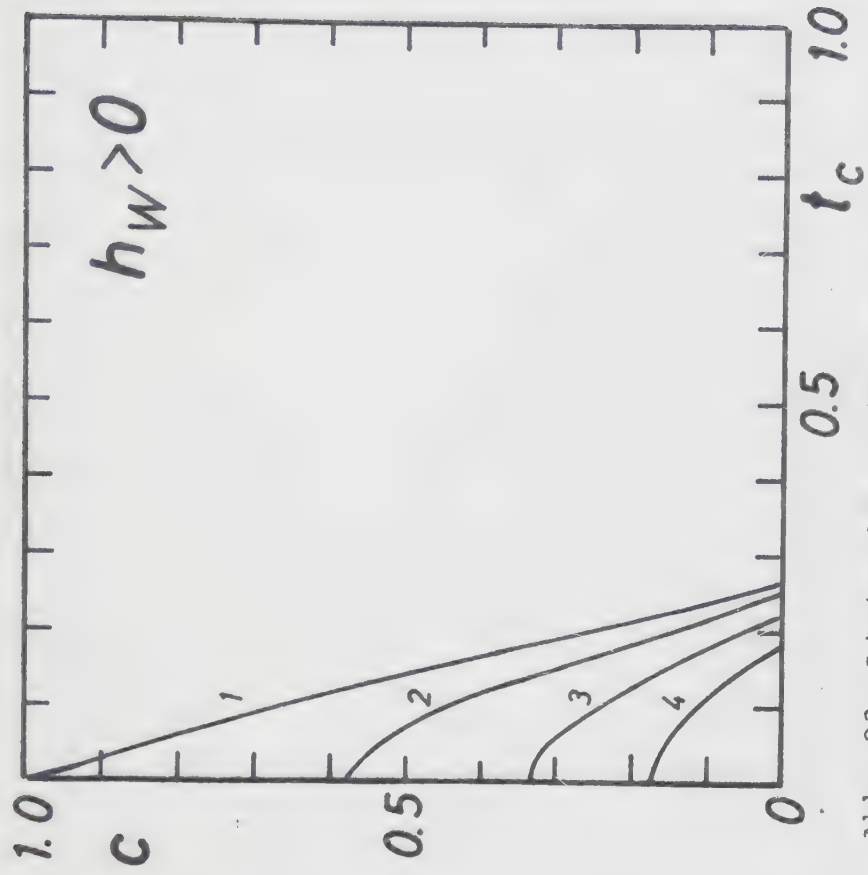


Abb. 23 Linien $h_w = 0$ für $b=0$, 0.1 , 0.2 , 0.3 (Typ II SL). Für die Punkte mit $h_w < 0$ gilt $f < 0$. Im Gebiet der Phasenübergänge zweiter Ordnung tritt keine Anomalie auf.

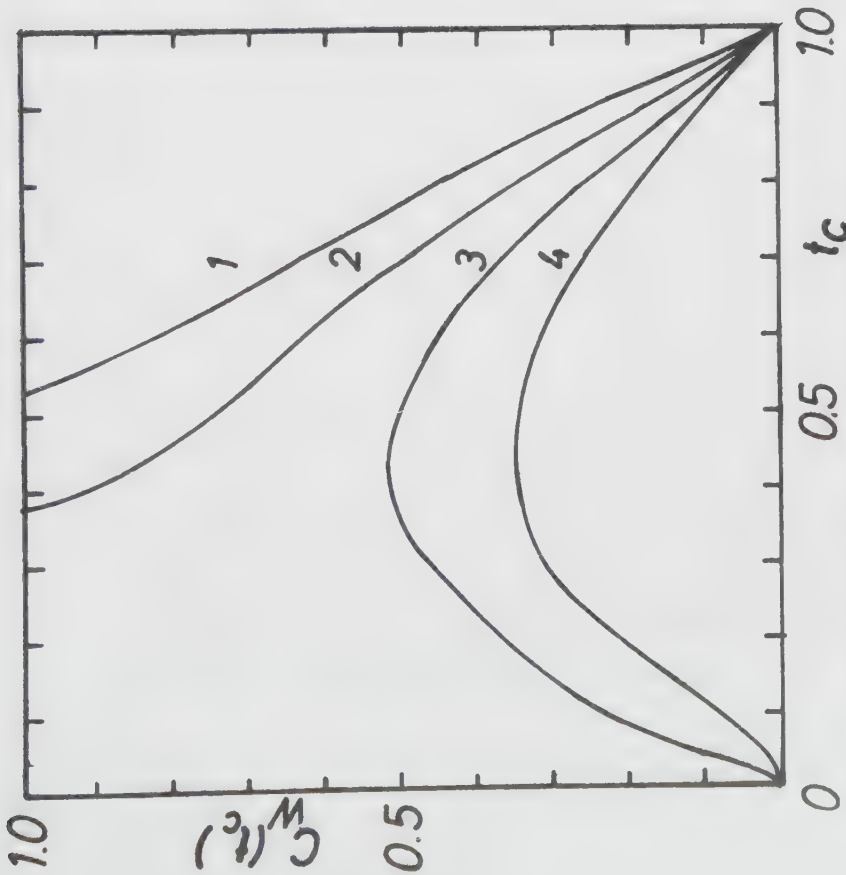


Abb. 24 Koeffizient der Wärmeleitfähigkeit für $b=0.5$ und verschiedene Werte von c .
 Die Kurven 1...4 entsprechen $c=0, 0.1, 0.3, \infty$ (Typ II SL)

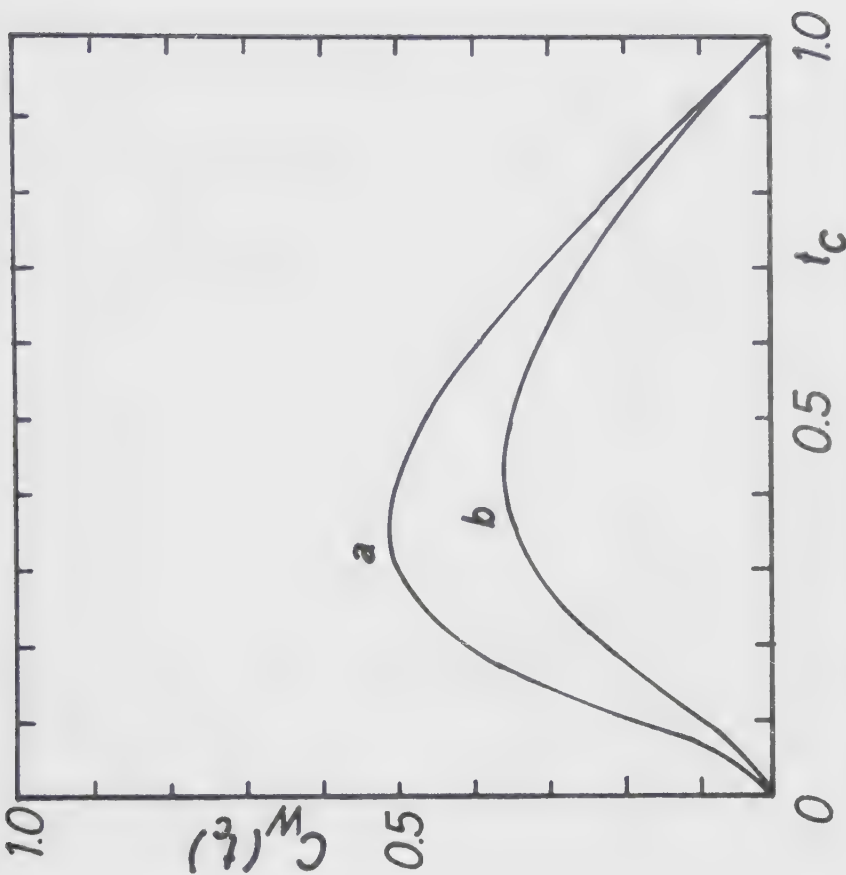


Abb. 25 Koeffizient der Wärmeleitfähigkeit für $b \rightarrow \infty$ und $a) c \rightarrow 0$ $b) c \rightarrow \infty$ (Typ II SL)

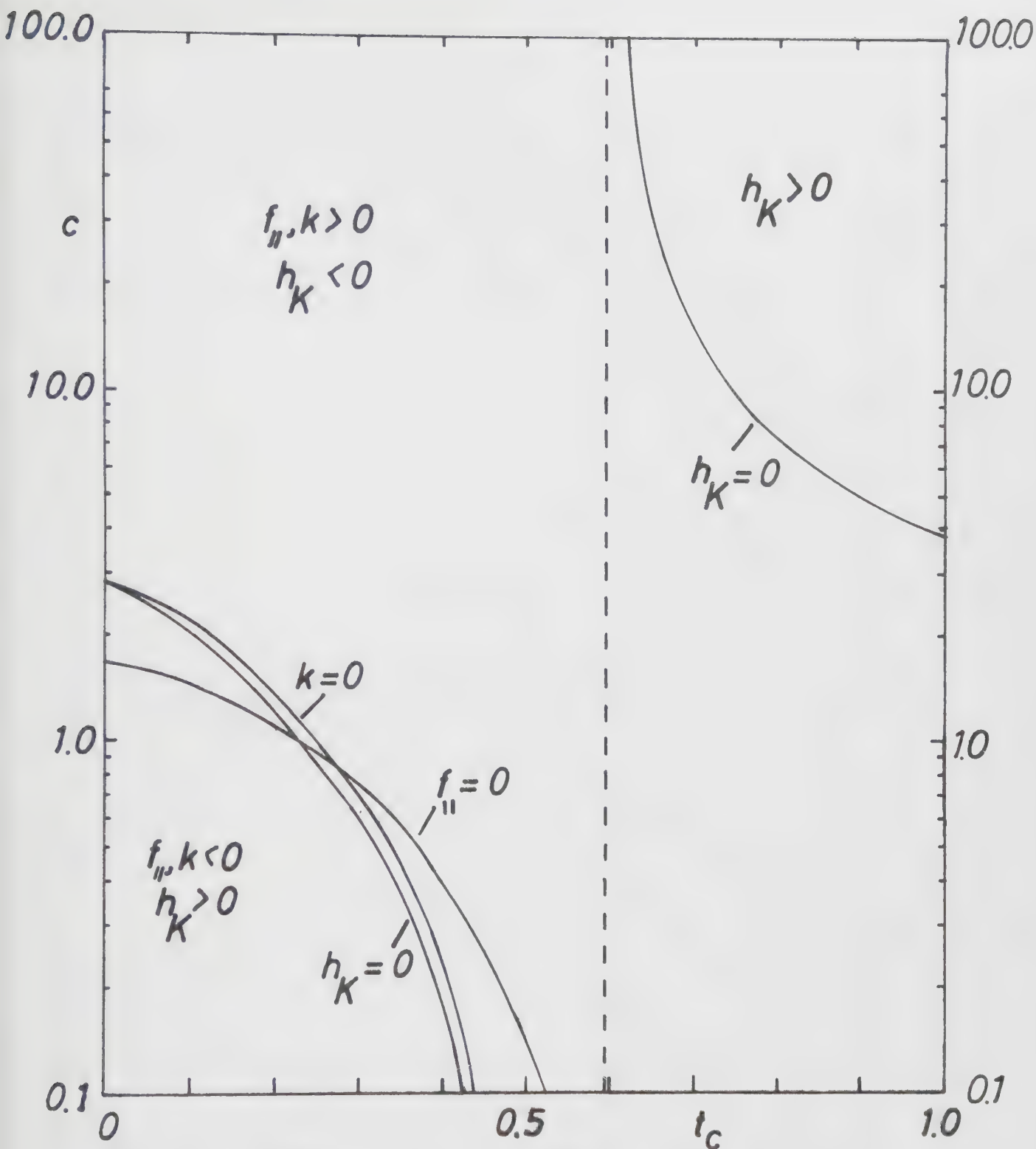


Abb. 26 Linien $f_{||}$, h_K , $k=0$ für $b=0$ (dünne Schicht)
 Für alle Punkte mit $h_K > 0$ und $f_{||} > 0$ ist die
 Kernspinrelaxationszeit im supraleitenden kleiner
 als im normalleitenden Zustand.

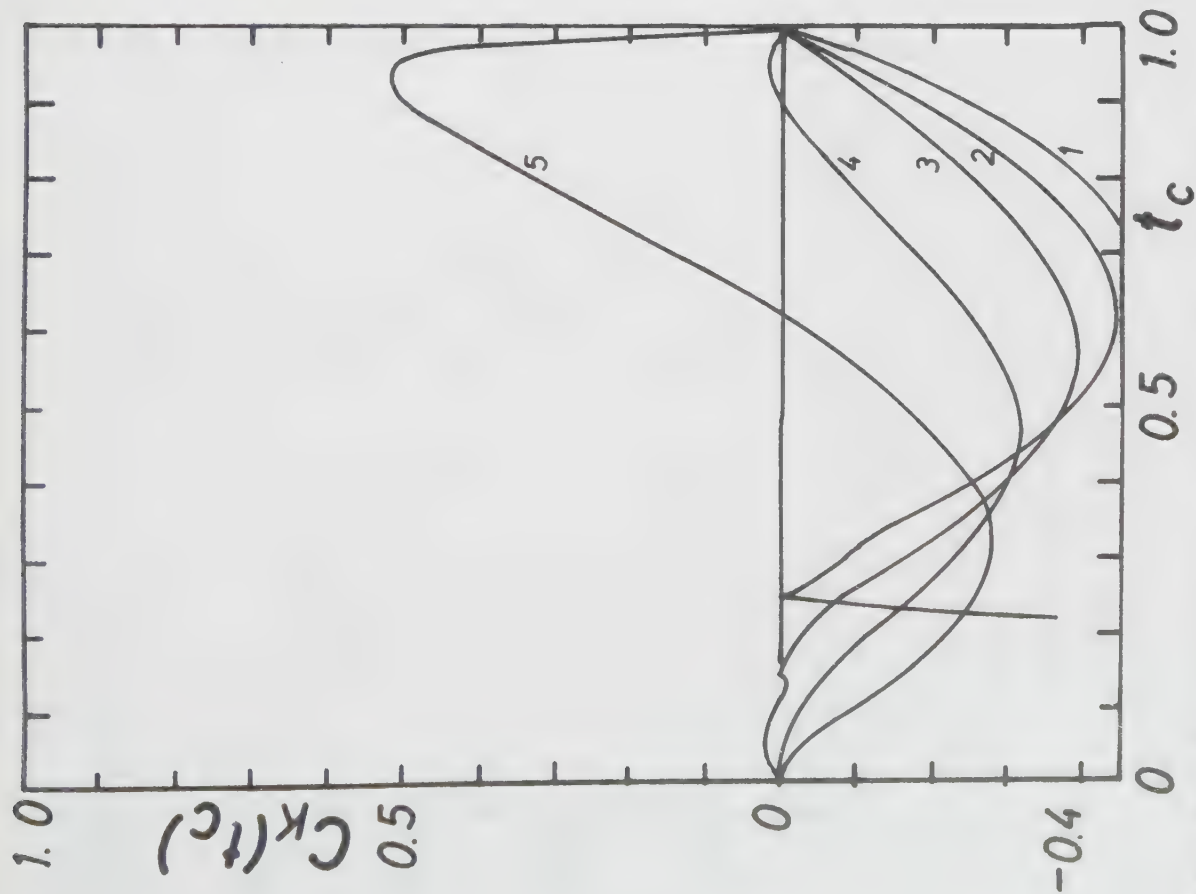


Abb. 27 Koeffizient der Kernspinrelaxation für $b=0$ und verschiedene Werte von c . Die Kurven 1...5 entsprechen $c=0$, 1.0, 2.0, 5.0 und $c \gg 1$ (dünne Schicht)

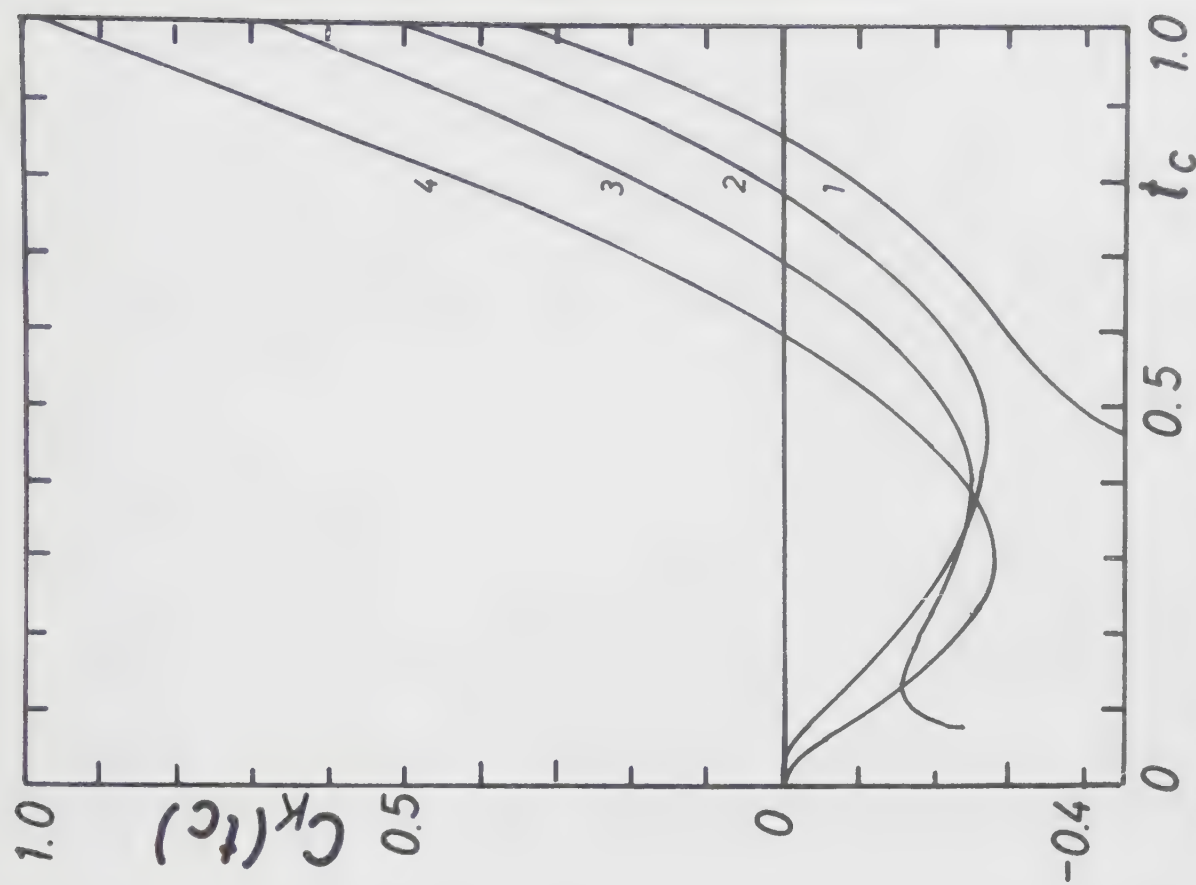


Abb. 26 Koeffizient der Kernspinrelaxation für $b = 0.5$ und verschiedene Werte von c . Die Kurven 1...4 entsprechen $c=0$, 0.1, 0.3, ∞ (dünne Schicht)

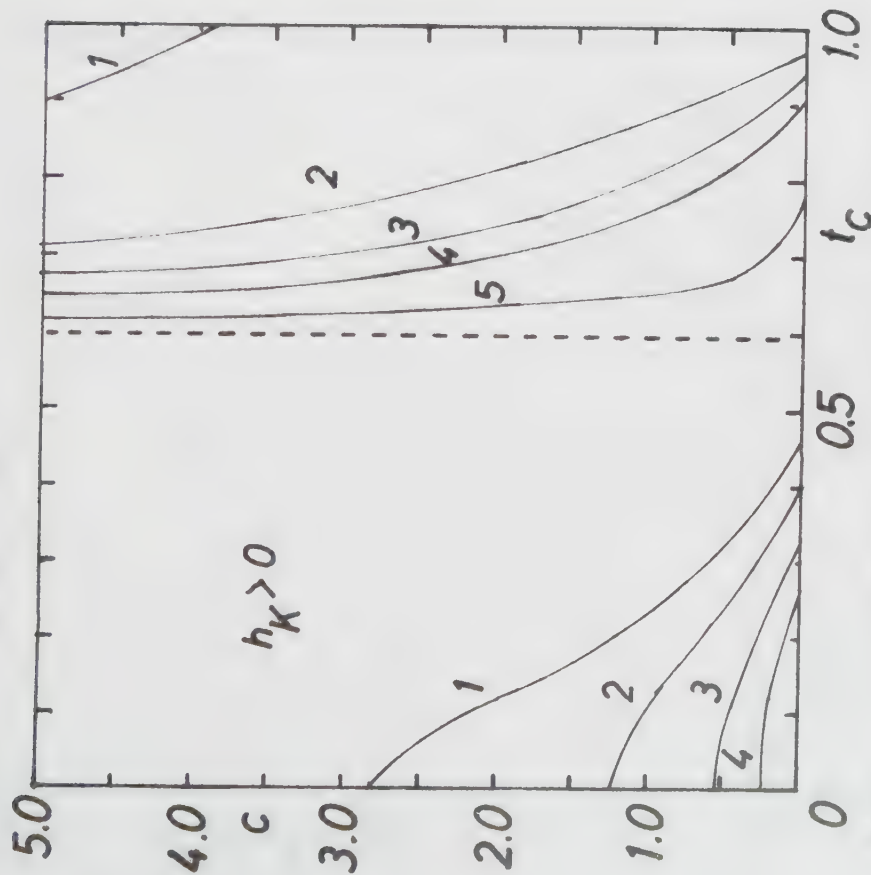


Abb. 29 Linien $h_K = 0$ für verschiedene Werte von b . Die Kurven 1...5 entsprechen $b=0, 0.1, 0.2, 0.3, 1.0$ (dünne Schicht)

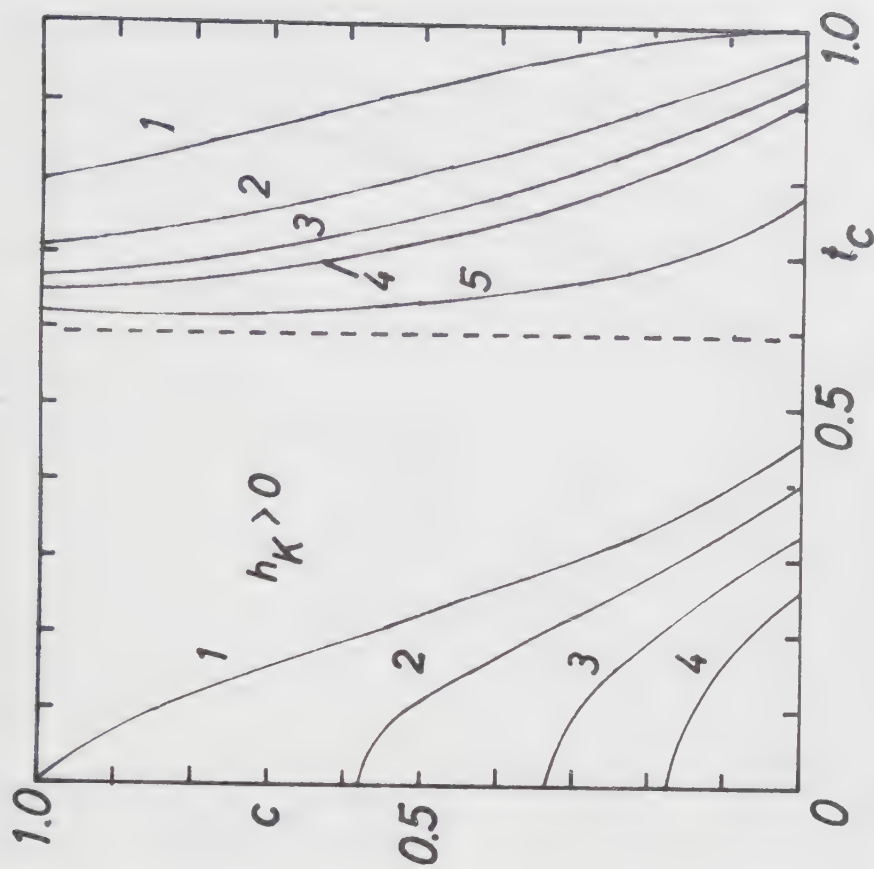


Abb. 30 Linien $h_K = 0$ für verschiedene Werte von b . Die Kurven 1...5 entsprechen $b=0, 0.1, 0.2, 0.3, 1.0$ (Typ II SL)

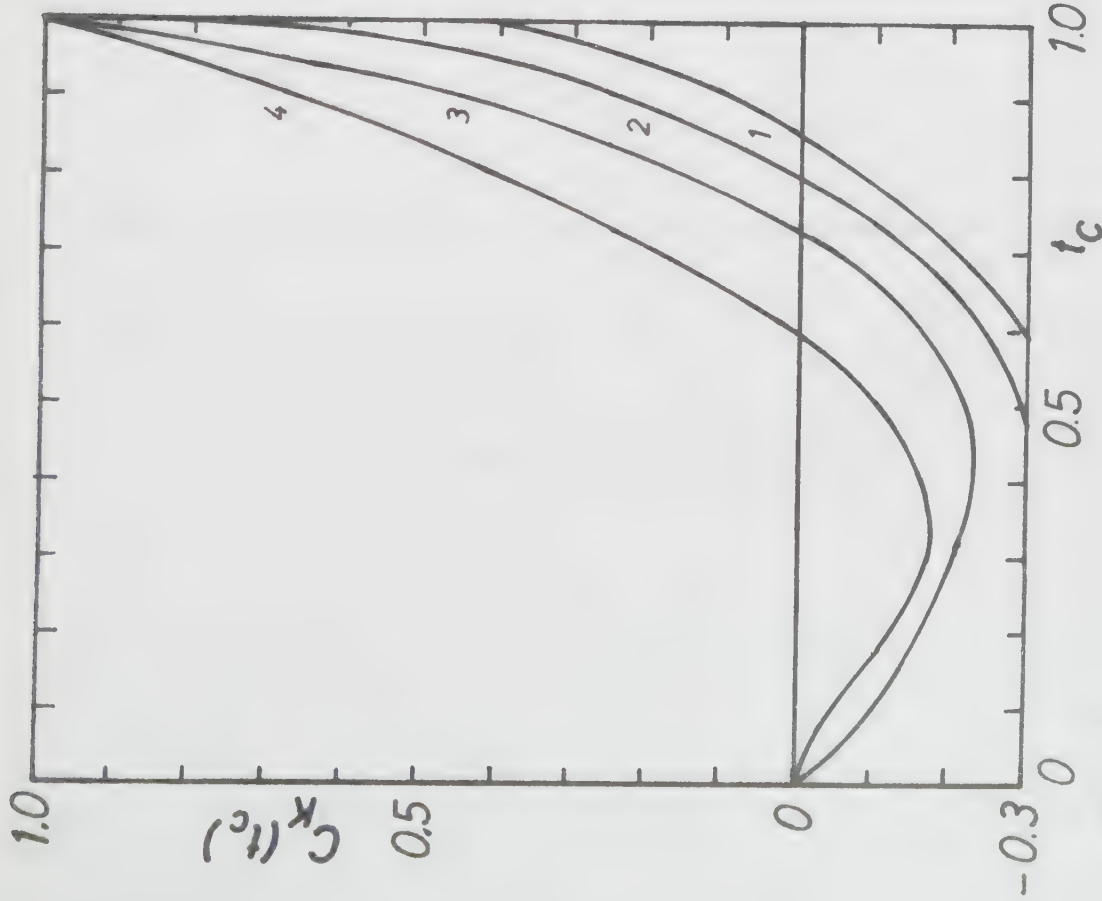


Abb. 31 Koeffizient der Kernspinrelaxation für $b=0.5$ und verschiedene Werte von c . Die Kurven 1...4 entsprechen $c=0, 0.1, 0.3, 1.0$ (Typ II SL)

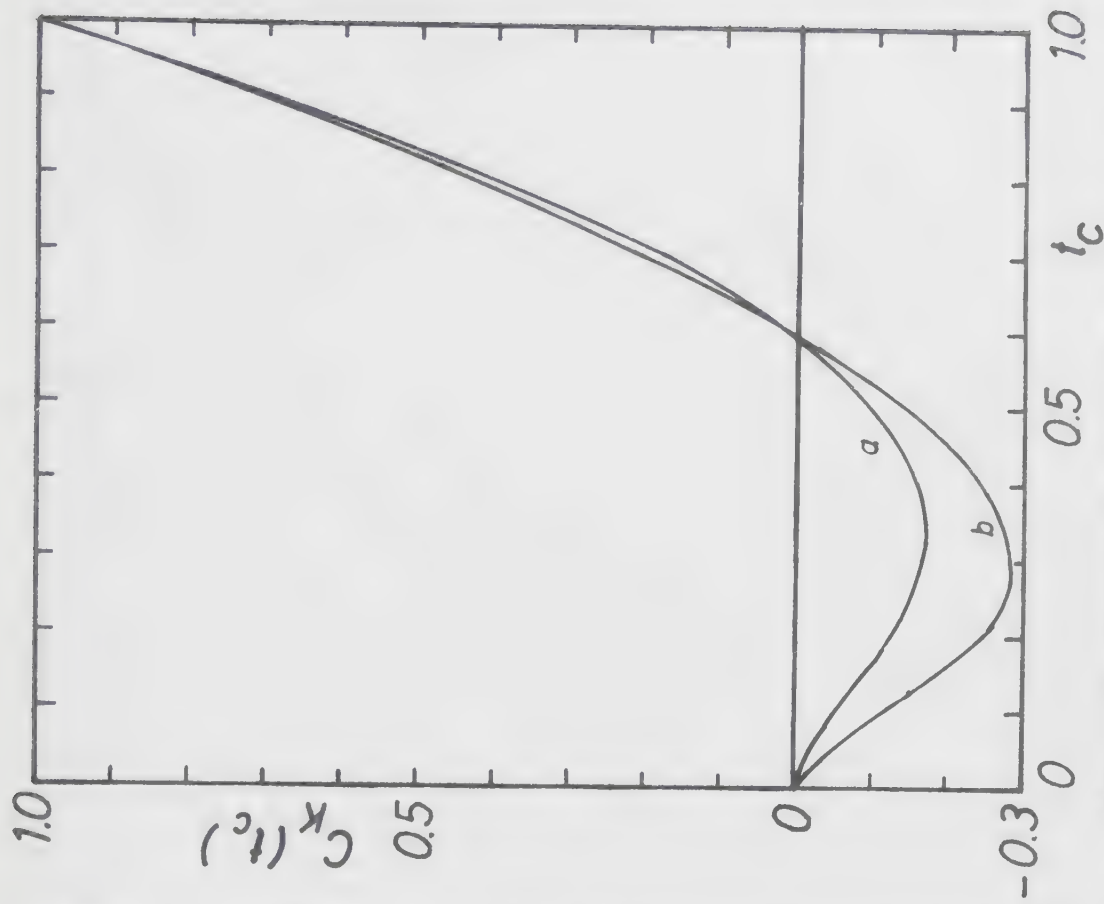


Abb. 32 Koeffizient der Kernspinrelaxation für $b \rightarrow \infty$ (Typ II SL)
a) $c \rightarrow 0$ b) $c \rightarrow \infty$

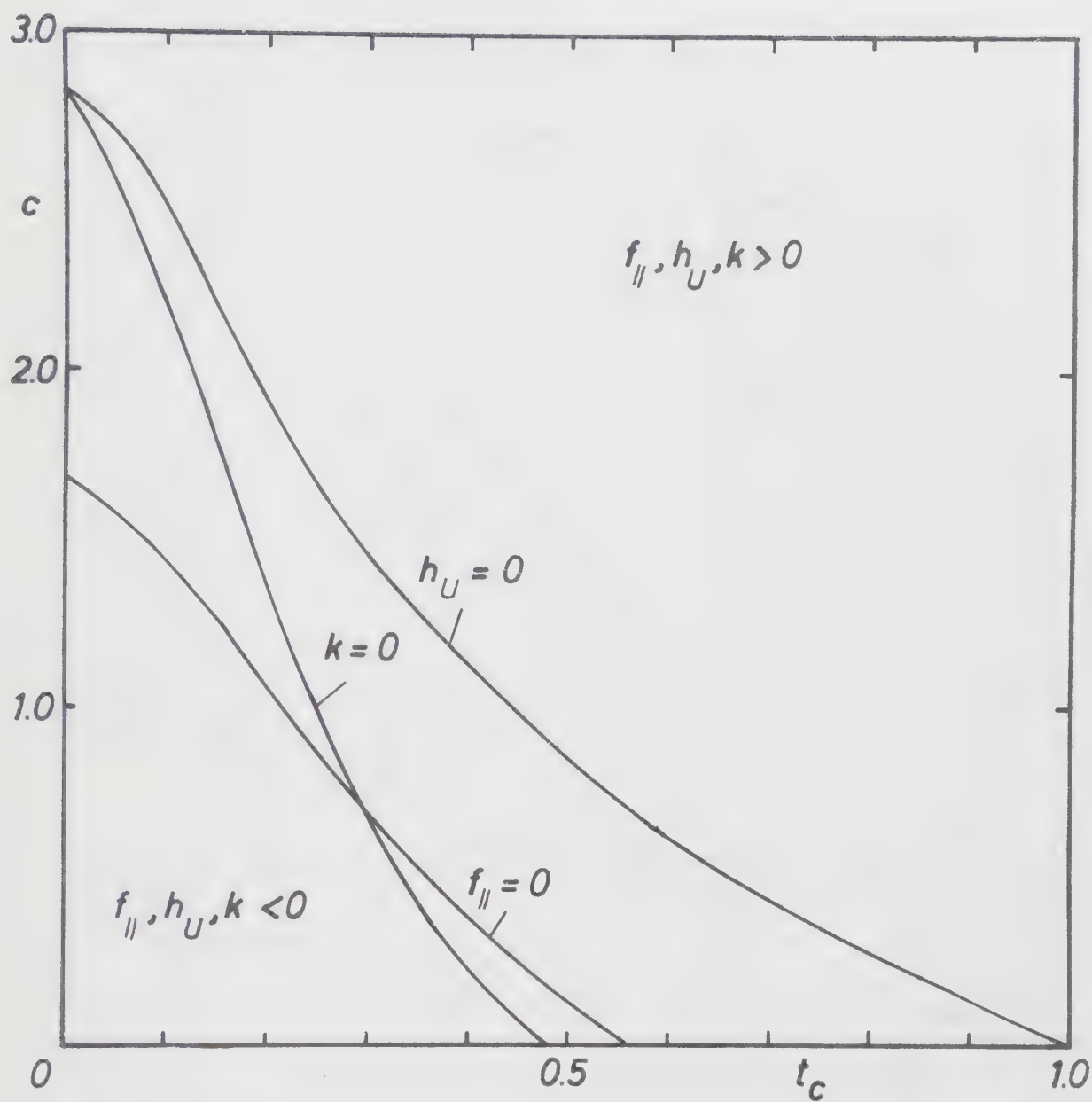


Abb. 33 Linien $f_{||}$, h_u , $k=0$ für $b=0$ (dünne Schicht)
 Für alle Punkte mit $h_u < 0$ und $f_{||} > 0$ ist die
 Ultraschallabsorption im supraleitenden größer
 als im normalleitenden Zustand.

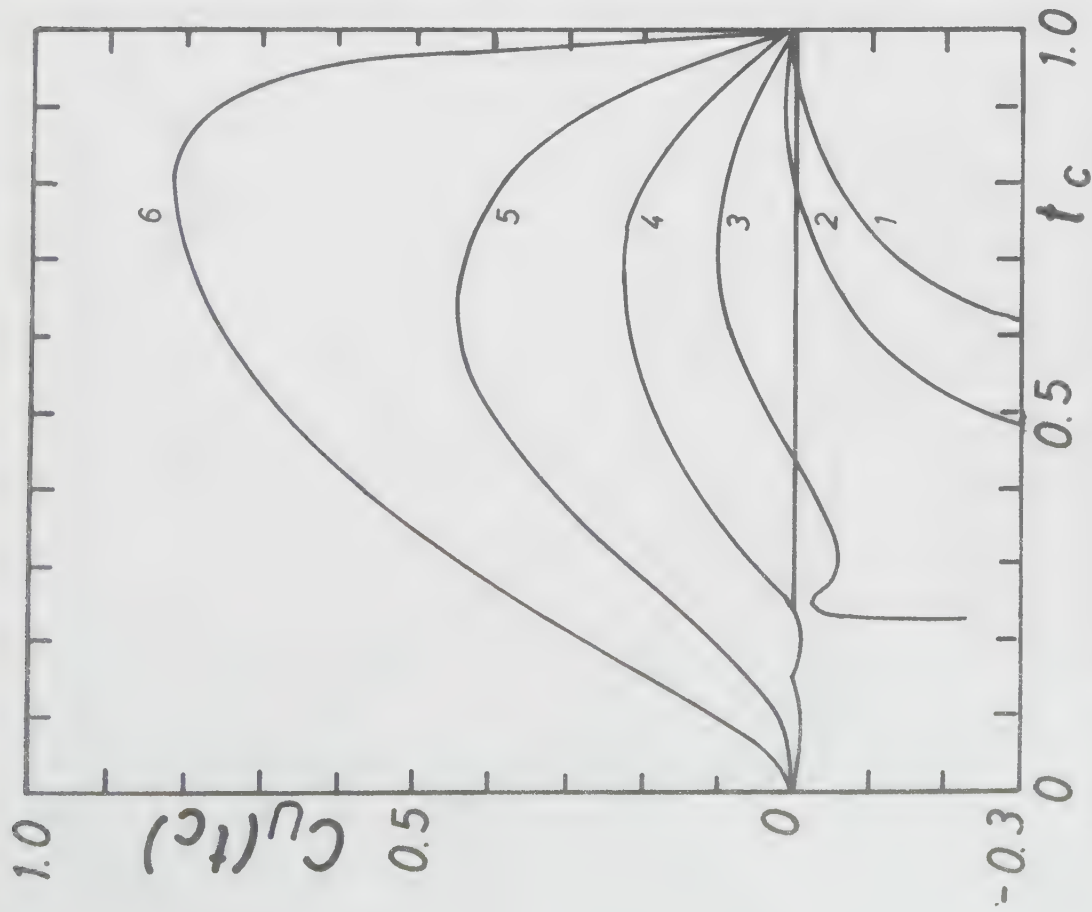


Abb. 34 Koeffizient der Ultraschallabsorption für $b=0$ und verschiedene Werte von c . Die Kurven 1...6 entsprechen $c=0, 0.3, 1.0, 2.0, 5.0$ und $c \gg 1$ (dünne Schicht)

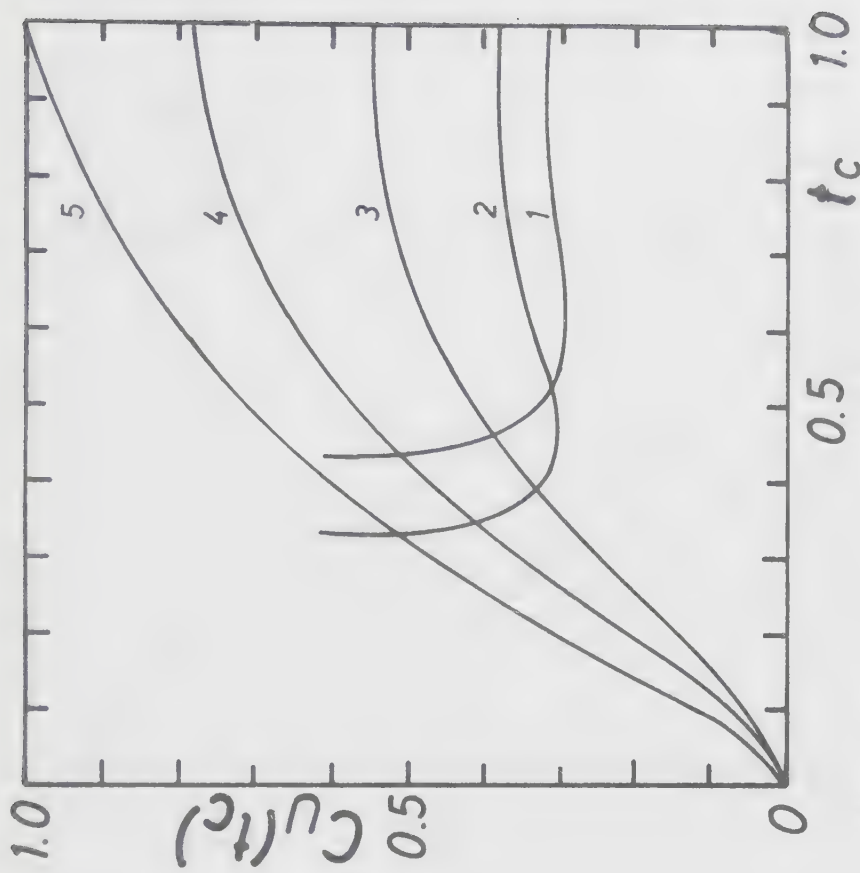


Abb. 35 Koeffizient der Ultraschallabsorption für $b=0.5$ und mehrere Werte von c . Die Kurven 1...5 entsprechen $c=0, 0.1, 0.5, 2.0, \infty$ (dünne Schicht)

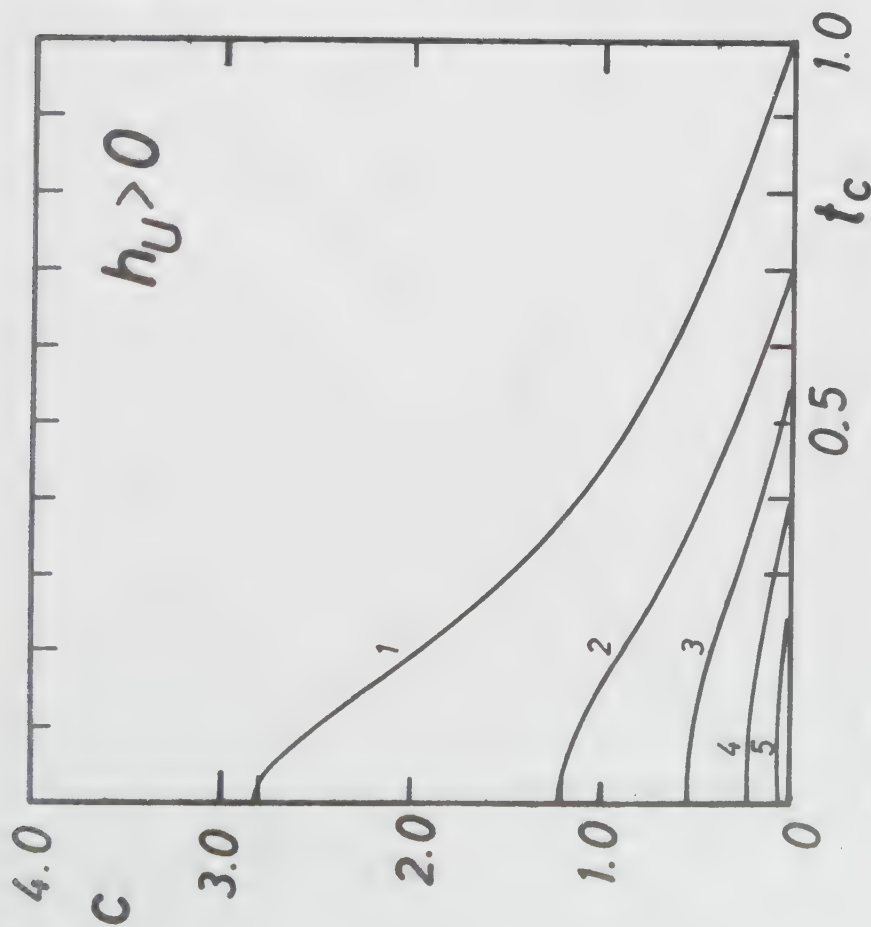


Abb. 36 Linien $h_U=0$ für verschiedene Werte von b . Die Kurven 1...5 entsprechen $b=0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ (dünne Schicht)

In den Punkten mit $h_U < 0$ und $f > 0$ ist die Ultraschallabsorption im supraleitenden Zustand größer als im normalleitenden Zustand.

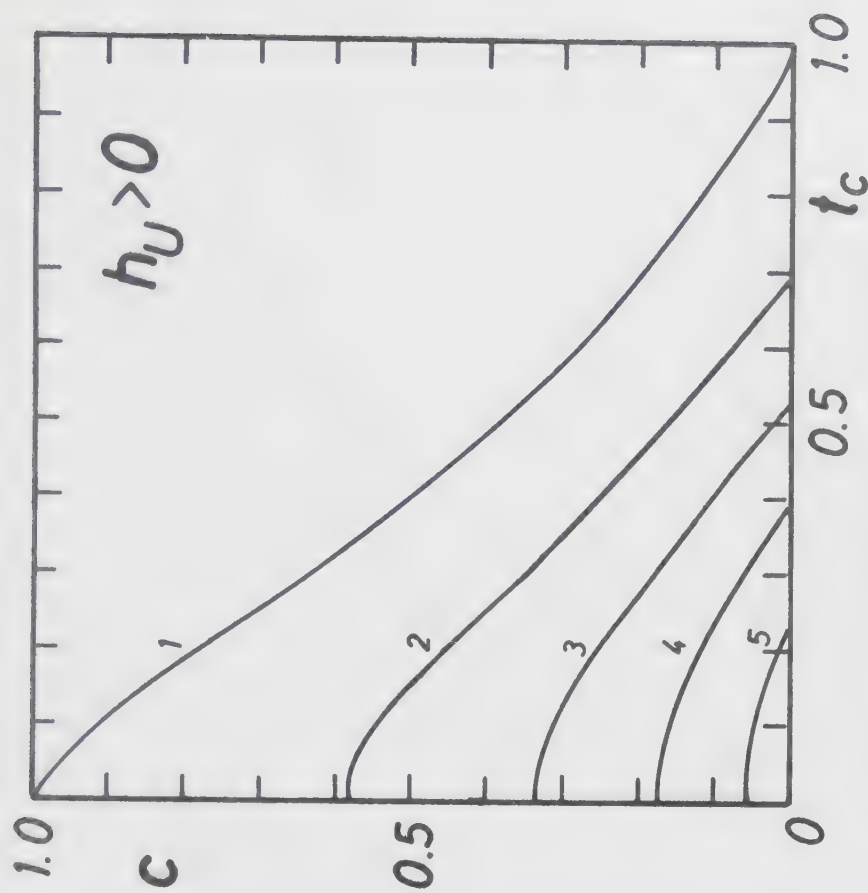


Abb. 37 Linien $h_U=0$ für verschiedene Werte von b . Die Kurven 1...5 entsprechen $b=0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$, (Typ II SL)

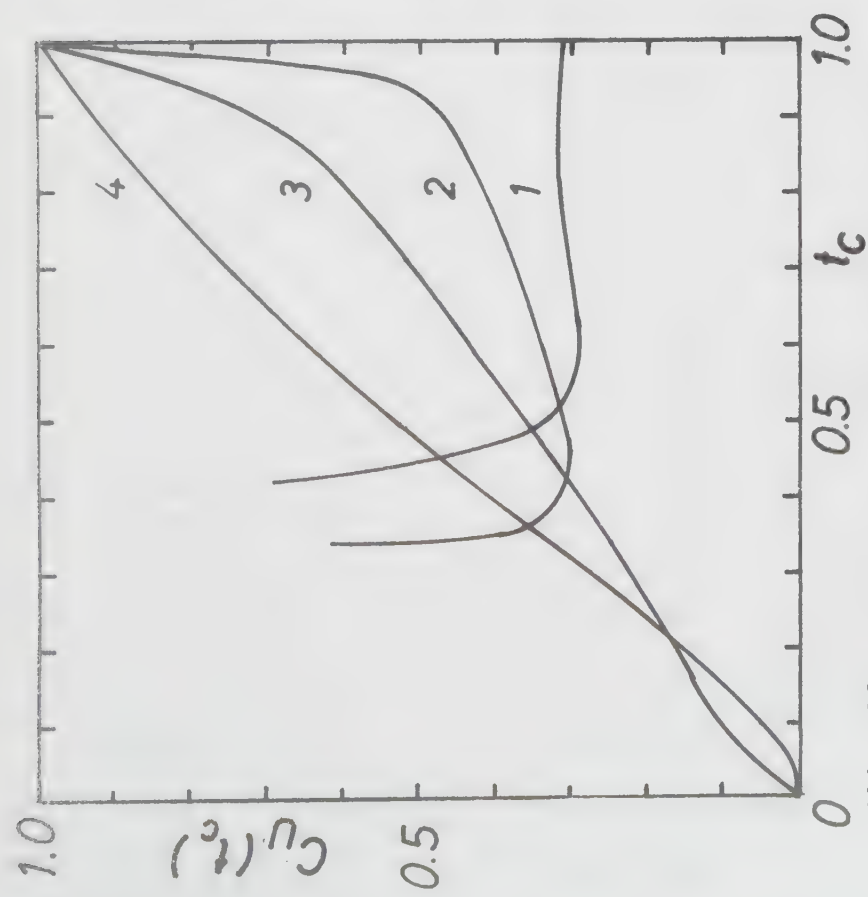


Abb. 38 Koeffizient der Ultraschallabsorption für $b=0.5$ und verschiedene Werte von c . Die Kurven 1...4 entsprechen $c=0, 0.1, 0.3, 0.5$ (Typ II SL)

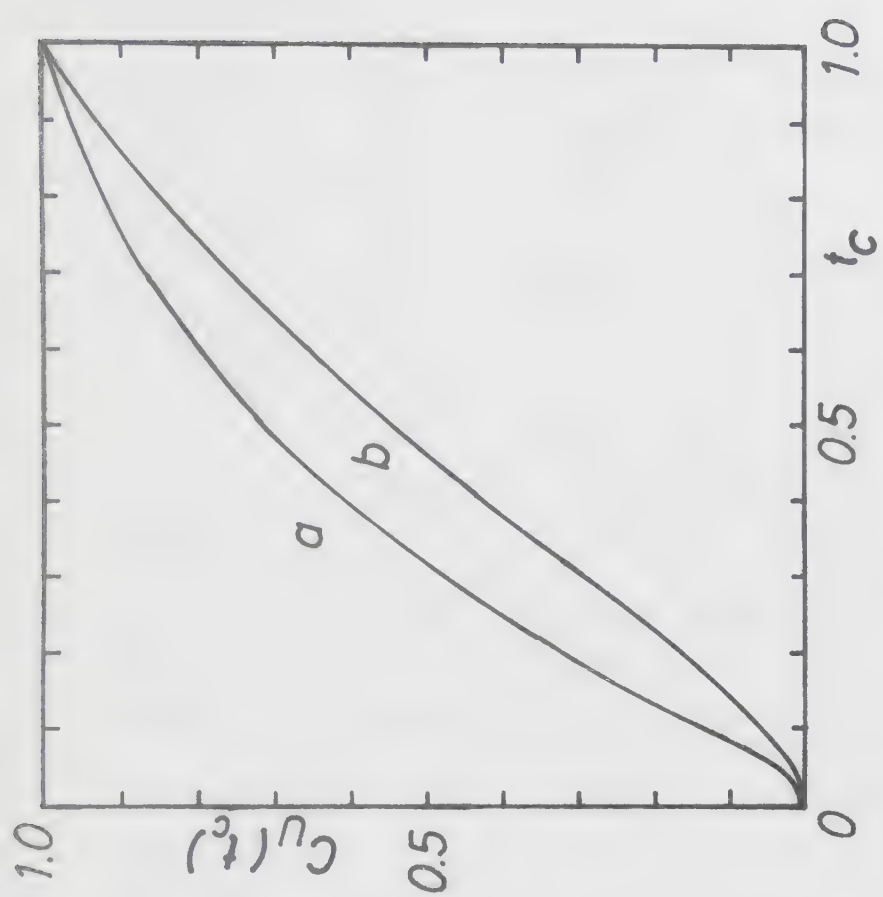


Abb. 39 Koeffizient der Ultraschallabsorption für $b \rightarrow \infty$
a) $c \rightarrow 0$ b) $c \rightarrow \infty$ (Typ II SL)

LITERATURVERZEICHNIS

1. Clogston A.M. Phys. Rev. Letters 9,266 (1962)
2. Chandrasekhar B.S. Appl. Phys. Letters 1,7 (1962)
3. Sarma G.J. J. Phys. Chem. Solids 24,1029 (1963)
4. Maki K., T. Tsuneto Progr. Theor. Phys. (Kyoto) 31,945 (1964)
5. Maki K. Progr. Theor. Phys. (Kyoto) 32,29 (1964)
6. Maki K. Physics 1,21 (1964)
7. Maki K. Physics 1,127 (1964)
8. Maki K. Phys. Rev. 148,362 (1966)
9. Werthamer N.R.
E. Helfand
P.C. Hohenberg Phys. Rev. 147,295 (1966)
10. Fulde P. Solid State Comm. 5,181 (1967)
11. Engler H., Fulde P. Physik Kondens. Materie 7,150 (1968)
12. Strongin M.,
Kammerer O.F. Phys. Rev. Letters 16,456 (1966)
13. Avenhaus R. Dissertation, Karlsruhe (1967)
14. Hake R.R. Phys. Rev. 158,356 (1967)
15. Landau L.D., Lifshitz Statistical Physics
Pergamon Press London (1958)
16. Avenhaus R., Fulde P., Physik Kondens. Materie 5,157 (1966)
17. Zubareff Sov. Phys. Usp. 3,320 (1960)
18. Abrikosov A.A.
Gorkov L.P.
Dzyaloshinski I.E. Methods of Quantum Field
Theory in Statistical
Physics (Prentice Hall, Inc.
Englewood Cliffs, New Jersey) (1963)
19. Abrikosov A.A.
Gorkov L.P. JETP 15,752 (1962)
20. Gorkov L.P. JETP 37,998 (1960)
21. de Gennes P.G. Physik Kondens. Materie 3,79 (1964)
22. McLean F.B.
Houghton A. Phys. Rev. 157,350 (1967)
23. Anderson P.W. Phys. Rev. Letters 13,325 (1959)
24. Fulde P., Maki K. Phys. Rev. 139 A,788 (1965)
25. Bardeen J.,
Rickayzen G.,
Tewordt L. Phys. Rev. 113,982 (1958)
26. Kadanoff L.P.,
P.C. Martin Phys. Rev. 124,670 (1961)
27. Maki K. Progr. Theoret. Phys. (Kyoto) 31,731 (1964)
28. Ambegaokar V.,
Griffin A. Phys. Rev. 137 A,1151 (1965)
29. Caroli C., Cyrot M. Physik Kondens. Materie 285 (1965)
30. Hebel L.C.
Slichter C.P. Phys. Rev. 113,1504 (1959)

- | | | | | |
|-----|----------------------------------|---|------------|--------|
| 31. | Ambegaokar V.,
Griffin A. | Proceedings of the IXth
International Conference
on Low Temperature Physics 1964 Part A,524 | | |
| 32. | Cyrot M. | J.de Physique | 27,283 | (1966) |
| 33. | Eppel D., Pesch W.
Tewordt L. | Z.Physik | 197,46 | (1966) |
| 34. | Tsuneto T. | Phys. Rev. | 121,402 | (1960) |
| 35. | Kadanoff C.P.
Falko I.I. | Phys. Rev. | 136 A 1170 | (1964) |
| 36. | Maki K. | Phys. Rev. | 148,370 | (1966) |

Herrn Professor Dr. P. Fulde danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für viele aufschlußreiche, fördernde Diskussionen und wichtige Hinweise.

Herrn Professor Dr. H. Bilz danke ich für die Möglichkeit, mein Studium an der Universität Frankfurt fortsetzen und diese Arbeit an seinem Institut durchführen zu können.

Weiterhin danke ich den Herren Dipl.-Phys. R. Benda und Dipl.-Phys. J. Keller für zahlreiche klärende Diskussionen.

Frau Fleischmann, Fräulein Schäfer, Frau Stein waren mir in dankenswerter Weise behilflich bei der Fertigstellung des Manuskripts.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die finanzielle Unterstützung.

Dem Deutschen Rechenzentrum in Darmstadt danke ich für die Bereitstellung der Rechenzeit.

LEBENS LAUF

Am 16. März 1939 wurde ich, Hans Engler, als Sohn des Ingenieurs Kurt Engler und seiner Ehefrau Margarete, geb. Wiegandt, in Koblenz geboren.

Von Herbst 1945 bis Herbst 1949 besuchte ich die Volksschule in Oberzissen/Rheinland-Pfalz. Von Herbst 1949 bis Ostern 1959 war ich Schüler des altsprachlichen Zweiges des Staatlichen Kurfürst Salentin Gymnasiums in Andernach/Rhein, an dem ich auch die Reifeprüfung ablegte. Das Studium der Physik nahm ich im SS 1959 an der Universität in Bonn auf. Die Vordiplomprüfung bestand ich dort im WS 61/62 und wechselte im WS 62/63 an die Universität Mainz über. Unter Anleitung von Professor Dr. W. Inthoff schrieb ich die Diplomarbeit im Institut für Theoretische Physik.

Nachdem ich die Diplomprüfung im SS 1965 abgelegt hatte, nahm ich eine Stelle als Physiker bei den Jenaer Glaswerken, Schott & Gen., Mainz, an.

Seit Februar 1966 bin ich Mitarbeiter von Professor Dr. P. Fulde am Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt/Main.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren
Drs. Bechert, Beckmann, Bleuler, Ecker, Ehrenberg,
Erwe, Fulde, Helfrich, Inthoff, Jaeckel, Kümmel,
Klages, Kollath, Meyerhoff, Müller, Münster,
Neumer, Osberghaus, Paul, Peschl, Riezler, Ringel,
Schmitz DuMont, Schubert, Stuart, Thimm, Tscheche,
Weizel, Wendt.

